

DIPLOMOVÁ PRÁCE

METODY VÍCEKRITERIÁLNÍ OPTIMALIZACE

Autor práce: Bohdana TUŠLOVÁ
FSV UK Praha, obor ekonomie

Konzultant: RNDr. Martin CERNÝ, CSc.

Práce je obhajována v letním semestru akademického školního roku
1995/96.

Prohlašuji, že jsem práci napsala sama, s použitím níže uvedené literatury.

v Praze dne 19.4.1996

ÚVOD

V této práci se zabývám problematikou vícekriteriální optimalizace. Vícekriteriální optimalizace je činnost pro člověka typická. Každý den řešíme problémy typu "co si dát k obědu" či "jet tramvají nebo metrem". Při rozhodování bereme obvykle v úvahu více kritérií jako je čas, finanční náklady, chuť, nálada apod. Výsledné rozhodnutí je takové, které subjektivně pocítujeme jako nejlepší, vybíráme pro nás optimální řešení, jinými slovy vícekriteriálně optimalizujeme.

Vícekriteriální optimalizace je nedílnou součástí běžné ekonomické praxe. Setkáváme se s ní nejen na mikroekonomické úrovni, ale též na úrovni makroekonomické: ať už jde o rozhodování o tom "co vyrábět, jak a pro koho" nebo o volbu adekvátní hospodářské politiky.

Na úvod ještě několik slov o struktuře této práce. Práce se skládá z osmi kapitol. První kapitola je úvodem do rozhodování, druhá je věnována charakteristikám. Třetí a čtvrtá kapitola se zabývají výběrem optimální varianty při alternativních způsobech zadání množiny dostupných variant. Obe kapitoly se pohybují v deterministickém světě. Třetí kapitola pojednává o komplexním vyhodnocování variant, čtvrtá kapitola se zaměřuje zejména na jednu z oblastí vektorové optimalizace, na lineární programování. Pátá kapitola nabízí alternativu k deterministickému přístupu, rozhodování za nejistoty, podobně jako kapitola šestá, rozhodování za neurčitosti. V sedmé kapitole jsou uvedeny principy interaktivních metod. V osmé kapitole je řešena úloha komplexního vyhodnocování variant. Na příkladu výběru optimálního spacího pytle z množiny dostupných spacích pytlů jsou demonstrovány některé metody určování vah přiřazených jednotlivým charakteristikám a některé metody agregace charakteristik.

OBSAH:

	strana
Úvod	3
Obsah	4
1.KAPITOLA - ROZHODOVÁNÍ	6
1.1 Rozhodování a stadia rozhodovacího procesu	6
1.2 Pojmy a znacení	7
2.KAPITOLA - CHARAKTERISTIKY	8
2.1 Preference	8
2.2 Delení charakteristik	9
2.3 Vztah mezi dvema charakteristikami	9
2.4 Vztahy mezi více charakteristikami	12
3.KAPITOLA - KOMPLEXNÍ VYHODNOCOVÁNÍ VARIANT	14
3.1 Užitkové funkce	14
3.2 Optimum	17
3.3 Metody nevyžadující informace o vztahu charakteristik	18
3.4 Metody vyžadující informace o žádoucích hodnotách charakteristik	19
3.5 Metody vyžadující ordinální serazení charakteristik	19
3.6 Metody vyžadující kvantitativní ohodnocení relativní důležitosti charakteristik	20
3.6.1 Váhy	20
3.6.2 Jednoduché metody agregace charakteristik	25
4.KAPITOLA - VEKTOROVÁ OPTIMALIZACE	30
4.1 Hledání extrému funkce	30
4.2 Lineární programování	32
4.2.1 Simplexová metoda	32
4.2.2 Lexikografické programování	38
4.2.3 Multiparametrické programování	41
4.2.4 Elipsoidický algoritmus	43

5.KAPITOLA - ROZHODOVÁNÍ ZA NEJISTOTY	44
5.1 Teorie stavu sveta	44
5.2 Postoj rozhodovatele k riziku	44
5.3 Merení rizika	45
5.4 Vícedimenzionální merení rizika	47
6.KAPITOLA - ROZHODOVÁNÍ ZA NEURCITOSTI	50
6.1 Mlhavé množiny	50
6.2 Pseudokritéria	51
6.3 Vyhodnocování variant za neurcitosti	51
6.3.1 Váhy za neurcitosti	51
6.3.2 Jednoduchá agregace charakteristik za neurcitosti	52
6.3.3 Verbální výrazy	53
6.3.4 Mlhavé relace	53
6.3.5 Metody agregace založené na prazích citlivosti	55
6.4 Lineární programování za neurcitosti	56
7.KAPITOLA - INTERAKTIVNÍ METODY	58
7.1 Interaktivní metody v úlohách komplexního vyhodnocování variant	58
7.1.1 Interaktivní urcování vah	58
7.2 Interaktivní metody v úlohách vektorové optimalizace	59
7.2.1 Metody založené na urcování mer substitute	59
7.2.2 Metody založené na urcování hodnot úcelových funkcí	61
7.2.3 Výber z množiny provizorních řešení	63
8.KAPITOLA - VÝBER SPACÍHO PYTLE	64
8.1 Stejně váhy všech charakteristik, metoda vzdálenosti	64
8.2 Prímý odhad vah, metoda vzdálenosti	66
8.3 Prímý odhad vah, metoda poradí	66
8.4 Saatyho metoda odhadu vah, metoda vzdálenosti a metoda poradí	67
8.5 Shrnutí výsledku	69
Prílohy	
Záver	71
Použitá literatura	71

1.KAPITOLA - ROZHODOVÁNÍ

1.1 ROZHODOVÁNÍ A STADIA ROZHODOVACÍHO PROCESU

Protože celá tato práce pojednává o vícekritériálním rozhodování a optimalizaci, nebude od věci, zastavím-li se nejprve u samotného pojmu "rozhodování". Za jakých situací vlastně rozhodujeme, co je v pozadí konání rozhodnutí? Obecně je to zřejmě stav konfliktu, nesouladu, a to bez ohledu na to, zda je tento stav subjektivně pocitován (napr. porušení osobních zásad) nebo objektivně projeven (napr. nulová ziskovost stávajícího výrobního programu). Rozhodovatel má tento stav nejlépe odstranit, není-li to možné, pak alespon zmírnit. Pritom už v samotném pojmu "rozhodování" je skryto urcité dilema. Rozhodnout znamená volit mezi prinejmenším dvema variantami, z nichž každá je v jistém smyslu dobrá. Pojmy "rozhodování" a "optimalizace" k sobe mají blízko; rozhodovatel se obvykle snaží, aby jeho rozhodnutí bylo za daných podmínek optimální.

V celém procesu rozhodování lze vycelenit nekolik stadií:

1.Stav konfliktu.

2.Rozbor a formulace rozhodovací úlohy. Rozhodovatel by se mel zamyslet nad příčinami konfliktní situace, ujasnit si, jaké jsou charakteristiky, dle kterých se budou jednotlivé varianty posuzovat, vytvorit si predstavu o tom, jak by vypadalo ideální řešení úlohy (ideální varianta).

3.Hledání a ohodnocování variant. Rozhodovatel prozkoumává, případne rozširuje množinu dostupných variant. Jednotlivé varianty ohodnocuje dle zvolených charakteristik. Muže se pritom ukázat, že zvolené charakteristiky nedokáží od sebe varianty dostatecne odlišit. Množina relevantních charakteristik tak muže být preformulována. Obdobne se mohou menit predstavu rozhodovatele o tom, jak vypadá ideální varianta.

4.Výber nejlepších varianty. Rozhodovatel odsunuje mimo zvažování dle jeho názoru nejhorší varianty. Ze zbylých variant se rozhoduje pro tu, která je v nejakém smyslu nejlepší, optimální a která úvodní konflikt v maximální možné míre redukuje.

1.2 POJMY A ZNACENÍ

V předcházející subkapitole jsem použila některé pojmy, které si zaslouží objasnění.

Charakteristiky vyjadrují, které skutečnosti jsou relevantní za dané rozhodovací situace. Napr. při výběru automobilu mohou vystupovat charakteristiky "spotřeba benzínu v l/100 km", "cena automobilu", "znacka automobilu" apod. V této práci se předpokládá (není-li uvedeno jinak), že rozhodovatel zvažuje m charakteristik. Charakteristiky budou označovány symbolem R_i , $i=1\dots m$. Blíže o charakteristikách pojednává 2. kapitola.

Varianta je objekt popsáný relevantními m charakteristikami. Ne všechny varianty mohou být rozhodovateli dostupné, rozhodovatel je ve svém výběru omezen na množinu dostupných variant. Tato množina bude v textu dále znacena symbolem X . Není-li uvedeno jinak, předpokládá se standardně, že rozhodovatel zvažuje n variant. Varianta bude chápána jako vektor hodnot, kterých ve variante nabývají jednotlivé charakteristiky, formálně $x_i=(x_{i1},\dots,x_{im})$, $i=1\dots n$.

Pojmy optimum a ideální varianta jsou podrobněji probrány v subkapitole 3.2, resp. 3.6.2.

2.KAPITOLA - CHARAKTERISTIKY

V této kapitole se budu podrobněji zabývat charakteristikami (kritérii, atributy, hledisky). Protože platí, že volba charakteristik relevantních pro rozhodovací úlohu ovlivňuje výsledné rozhodnutí, měla by se jí a vůbec celé analýze vztahu mezi charakteristikami venovat dostatečná pozornost. Výber charakteristik je výrazem preferencí rozhodovatele, venuji tedy první subkapitolu právě preferencím.

2.1 PREFERENCE

Preference rozhodovatele tvoří dle mého názoru základ pro řešení úloh vícekriteriální optimalizace. Z toho vyplývá potřeba najít postupy, kterými by se daly preference formalizovat či modelovat a zabudovat do rozhodovacích úloh. Toto je obvykle ztíženo skutečností, že v realitě mají preference radu "nepříjemných" vlastností, jejich struktura je často neúplná či nejasná (mlhavá) a musí se postupně odkrývat a vyjasňovat.

Rozhodovatel může projevit své preference mnoha způsoby. Dle meritelnosti je možné rozdelit preference do dvou velkých skupin:

- 1.Preferencce meritelné ordinálne.
- 2.Preferencce meritelné kardinálne.

Do první skupiny patří zejména:

- 1.Párové porovnání duležitosti (preferovanosti) objektu (napr. charakteristik nebo variant) a ordinální určení preferovanejšiho objektu.
- 2.Serazení objektu dle jejich relativní duležitosti (sestupne nebo vzestupne).

Druhá skupina se vyznacuje tím, že jsou preference nejakým způsobem kvantifikovány. Sem patří napr.:

- 1.Urcení pomeru duležitosti objektu, tj. kolikrát je první z objektu duležitejši než druhý.
- 2.Urcení míry substituce mezi dvema objekty, tj. jaké množství prvního objektu je rozhodovatel ochoten obetovat, aby u druhého objektu dosáhl zvýšení o nejaké (napr. jednotkové) množství.
- 3.Ocenení intenzity preference na predem zvolené stupnici.
- 4.Alokace urcitého množství bodu mezi jednotlivé objekty (jde vlastne o přímé určení vah duležitosti jednotlivých objektu).

5. Stanovení limitu (prahu), pod které nesmí klesnout (nebo které nesmí překročit) hodnota objektu.

Většina výše popsaných způsobů vyjadrování preferencí má společný stycný bod: porovnávání. O preferencích pojednávají dále zejména subkapitola 3.1, 6. a 7. kapitola.

2.2 DELENÍ CHARAKTERISTIK

Charakteristiky se dají hodnotit podle různých hledisek. Jedním z nejčastějších způsobů delení charakteristik je delení na

1. Charakteristiky kvantitativní povahy (též kardinální charakteristiky), tj. více či méně spolehlive objektivne meritelné charakteristiky (napr. míra inflace, velikost schodku platební bilance).
2. Charakteristiky kvalitativní povahy (též ordinální charakteristiky), tj. takové charakteristiky, které se nedají objektivne merit (typicky napr. krása).

U každé kardinální charakteristiky se dá obvykle určit smer, v němž je zmena hodnot charakteristiky žádoucí, tj. zda má být charakteristika maximalizována nebo minimalizována. Alternativou k tomuto je určení cílové hodnoty, které by měla charakteristika nabýt. Úcelové funkce definované nad charakteristikami obdobne indikují smer pohybu hodnot kombinací hodnot jednotlivých charakteristik.

V mnoha úlohách je potreba ordinální charakteristiky kardinalizovat. K tomuto lze užít některé z metod uvedených v subkapitole 3.6.1 (napr. metodu poradí nebo bodovací metodu) s tím rozdílem, že se příslušné operace provádějí s variantami (namísto charakteristik) z hlediska příslušné ordinální charakteristiky.

2.3 VZTAH MEZI DVEMA CHARAKTERISTIKAMI

Z hlediska rozhodovacího problému je možné klást následující otázky:

1. Jaký počet charakteristik zvolit. Příliš velký počet charakteristik může pocetne zkomplikovat či znemožnit nalezení řešení. Při příliš malém počtu charakteristik hrozí, že budou zanedbány některé pro rozhodnutí významné aspekty. Jde tedy o nalezení dostatečného počtu charakteristik s dostatečnou vypovídací a rozlišovací schopností.

2. Jaký je vzájemný vztah mezi dvojicemi charakteristik, příp. skupinami charakteristik. Jinými slovy objasnit, zda jsou charakteristiky na sobe závislé, do jaké míry jsou si podobné apod.
3. Jaký je vliv jednotlivých charakteristik, příp. skupin charakteristik na výsledné rozhodnutí.

Vztahy mezi charakteristikami má obecně smysl zkoumat jednak mezi charakteristikami relevantními pro danou rozhodovací úlohu a dále vzhledem k množině dostupných variant X . Níže popsané metody se dají použít, je-li počet charakteristik i variant konečný a takový, že jsou uvážené operace realizovatelné.

Základním pojmem pro zkoumání vztahu mezi dvěma charakteristikami je nezávislost charakteristik. Dvě charakteristiky jsou nezávislé, pokud hodnocení první z nich nezávisí na dosažené hodnotě druhé z nich. Např. o nezávislosti charakteristik "cena automobilu" a "spotřeba benzínu v l/100 km" se dá mluvit tehdy, je-li hodnocení částky 300 tisíc Kč pro rozhodovatele stejné při spotřebě 7 l/100 km i 12 l/100 km. Je vidět, že tento požadavek je silný a že platí zřejmě jenom v určitém rozmezí hodnot charakteristik. Spíše se dá předpokládat, že charakteristiky na sobe budou určitým způsobem závislé. Závislost dvou charakteristik se dá zkoumat např. následujícími metodami:

1. Kendallovým koeficientem pořadové korelace. Vyberou se dvě charakteristiky a vytvoří se dvě posloupnosti variant tak, že jsou varianty uspořádány nejprve vzhledem k první a potom vzhledem ke druhé charakteristice. Každé variantě $x_i \in X$ jsou tak přiřazena dvě pořadová čísla r_{i1} a r_{i2} , udávající její pořadí v každé z posloupností (čím lepší ohodnocení varianty, tím menší pořadové číslo, neuvažuje se, že by varianty mohly být hodnoceny stejně). Pro každou dvojici variant $x_i, x_j \in X$, $i \neq j$, se zkoumá vztah mezi umístěním v každé z posloupností. Je-li $r_{i1} > r_{j1}$ (tj. varianta x_i je podle první charakteristiky hodnocena hůře než varianta x_j), je této dvojici přiřazeno číslo -1, je-li $r_{i1} < r_{j1}$, pak je dvojici přiřazeno číslo +1. Totéž se zopakuje i pro druhou posloupnost. Výsledné číslo dvojici přiřazené se získá vynásobením těchto dvou čísel. Je-li to +1, je jedna z variant rozhodovatelem posuzována dle obou charakteristik buď lépe nebo hůře. Setou-li se všechna srovnání, v nichž se dospelo ke konečnému výsledku +1 (označí se P) a všechna srovnání, v nichž se dospelo ke konečnému výsledku -1 (označí se Q), lze koeficient definovat:

$$\tau = \frac{P - Q}{n(n-1)/2}.$$

Koeficient nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Nabyde-li hodnoty +1, znamená to, že jsou varianty serazeny dle obou charakteristik stejně. Metoda se dá upravit i pro případ, že jsou některé varianty posuzovány z hlediska jedné (příp.obou) charakteristik stejně (tj. napr. $r_{i1} = r_{j1}$).

2. Spearmanovým koeficientem. I zde se vychází z výše popsaného vytvoření dvou posloupností. Definuje-li se

$$D = \sum_{i=1}^n (r_{i1} - r_{i2})^2,$$

pak se dá definovat Spearmanuv koeficient

$$\rho = 1 - \frac{6D}{n^3 - n}.$$

Spearmanuv koeficient nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Hodnota koeficientu +1 opět odpovídá zcela shodnému ohodnocení variant z hlediska obou charakteristik. Oproti Kendallovu koeficientu bere Spearmanuv koeficient v úvahu i to, jak daleko jsou od sebe varianty v obou hodnoceních.

3. Výpočet koeficientu vzdálenosti. Pro každou charakteristiku lze sestavit nulajednotkovou incidencní matici $\mathbf{R}_{n \times n}$, jejíž prvek r_{ij} je definován na základe relace platné mezi $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X$ podle příslušné charakteristiky (uvažuje se pouze ostrá preference, indiference či nemožnost srovnání, viz 3.1). Vytvorí-li se pro dve srovnávané charakteristiky R_1 a R_2 rozdíl jejich incidencních matic (v absolutní hodnotě), dá se definovat koeficient vzdálenosti obou charakteristik:

$$d(R_1, R_2) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij1} - r_{ij2}|}{n(n-1)}.$$

Koeficient se pohybuje v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota koeficientu 0 pritom znamená, že hodnocení variant dle obou charakteristik je shodné, tj. obe charakteristiky jsou si nejbliž.

2.4 VZTAHY MEZI VÍCE CHARAKTERISTIKAMI

Podobne jako v prípade dvou charakteristik je možné zabývat se vztahy mezi všemi uvažovanými charakteristikami. Uvádím nekolik možných přístupů:

1. Je možné po dvou srovnávat charakteristiky výše uvedenými způsoby.
2. Výpočet koeficientu konzistence. Jde o zobecnění principu vytváření posloupností (razení variant dle jednotlivých charakteristik). Každé variante $x_i \in X$ je tímto přiřazena uspořádaná m-tice poradí $r_i = (r_{i1}, \dots, r_{im})$. Je možné definovat součet těchto poradí

$$r_i = \sum_{j=1}^m r_{ij}.$$

Vzhledem k tomu, že střední hodnota tohoto součtu je $1/2m(n+1)$, lze dále definovat

$$s = \sum_{i=1}^n (r_i - 1/2m(n+1)).$$

Hodnota maxima součtu těchto odchylek je $1/12m^2(n^3-n)$ při shodném srovnání variant dle všech charakteristik. Koeficient konzistence se tedy dá definovat

$$W = \frac{12s}{m^2(n^3 - n)}.$$

Koeficient nabývá maximální hodnoty +1. Čím je koeficient vyšší, tím podobnější jsou jednotlivá srovnání. Metodu lze opět modifikovat pro případ, že jsou některé varianty hodnoceny dle některých charakteristik stejně.

3. Shluková analýza. Je často užívaná statistická metoda. Základní myšlenkou shlukové analýzy je shluknout objekty (zde jsou tímto objekty charakteristiky) do shluku tak, aby si byly v rámci jednoho shluku co nejpodobnější a aby zároveň byly jednotlivé shluky co nejrozdílnější. Přitom existují různé metody jak shluky vytvářet, např. je možné považovat nejdříve všechny charakteristiky za jeden shluk a ten dělit na menší. Pro dělení je nutné definovat nějakou míru podobnosti, např. korelační nebo Kendallův koeficient.

Na základe provedené analýzy charakteristik si lze udelat představu o tom, jak uspokojivým výsledkům povede agregace charakteristik (3.6.2). Čím více jsou si usporádání dle jednotlivých charakteristik podobnější, tím bude agregace i hledání optima méně konfliktní. Na druhou stranu se ale nabízí otázka, jaké informace přinášejí do rozhodování takto si podobné charakteristiky. To směřuje k problému snižování počtu charakteristik.

Jednou z možností je uvažovat pouze ty charakteristiky, které jsou považovány za nejdůležitější (např. je-li důležitost charakteristik vyjádřena vahami (3.6.1), pak se za nejdůležitější dají považovat charakteristiky s největšími vahami) a ostatní zanedbat. Další možností je vybrat skupinu nejdůležitějších charakteristik, provést pro ni vyhodnocení variant, skupinu charakteristik rozšířit a provést vyhodnocení pro tuto rozšířenou skupinu. Neliší-li se od sebe výsledky, je výběr charakteristik dostatečný, liší-li se, je nutné skupinu dále rozšiřovat.

Charakteristiky by měly mít obecně dostatečnou rozlišovací schopnost. Nabývá-li charakteristika ve všech dostupných variantách téměř stejné hodnoty (neboli rozptyl hodnot charakteristiky je malý), je možné charakteristiku zanedbat.

3.KAPITOLA - KOMPLEXNÍ VYHODNOCOVÁNÍ VARIANT

Úlohy vícekriteriální optimalizace lze rozdělit do dvou velkých skupin:

1. Úlohy komplexního vyhodnocování variant.
2. Úlohy vektorové optimalizace.

Úlohy komplexního vyhodnocování variant lze charakterizovat následovně: rozhodovatel stojí před množinou dostupných variant, přičemž těchto variant je konečný počet. Varianty jsou popsány m charakteristikami. Adjektivum "komplexní" naznačuje, že jde o vyhodnocování variant dle všech těchto charakteristik. Úlohou rozhodovatele může být nalezení optimální varianty, vyřazení variant zřejmě neoptimálních nebo uspořádání celé množiny variant.

Úlohy vektorové optimalizace se odlišují od úloh komplexního vyhodnocování variant především tím, že hodnocených variant je nekonečně mnoho (mohou sem spadat i úlohy komplexního vyhodnocování variant s velkým počtem variant), což je zapříčineno způsobem zadání množiny přípustných variant X . Ta je zadávána formou omezení kladených na charakteristiky, tj. nepřímou. Dále je nutné, aby všechny charakteristiky byly kardinální povahy, tj. je nutné všechny ordinální charakteristiky kardinalizovat. Úlohám vektorové optimalizace je věnována 4. kapitola.

3.1 UŽITKOVÉ FUNKCE

Stojí-li rozhodovatel před úkolem porovnat dvě varianty x_1 a x_2 z množiny X a je-li tohoto porovnání schopen, tj. je schopen vyjádřit své preference, mluvíme o existenci preferenční relace. Mohou nastat tři případy:

1. Varianta x_1 je jednoznačně lepší než varianta x_2 neboli varianta x_1 je ostře preferována před variantou x_2 (formální zápis $x_1 P x_2$).
2. Varianta x_1 je přinejmenším stejně dobrá jako varianta x_2 neboli varianta x_1 je preferována před variantou x_2 (formální zápis $x_1 R x_2$).
3. Varianta x_1 je stejně dobrá jako varianta x_2 , rozhodovatel je mezi variantami indiferentní ($x_1 I x_2$).

K tomu, aby se výsledná preferenční struktura "rozumne" chovala, je nutné, aby tato preferenční relace měla alespon některé z následujících vlastností:

1. úplnost: $\forall x_1, x_2 \in X$ platí: $x_1 R x_2$ nebo $x_2 R x_1$,
2. reflexivita: $\forall x \in X$ platí: $x R x$,
3. tranzitivita: $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ platí: $x_1 R x_2, x_2 R x_3 \Rightarrow x_1 R x_3$,
4. silná monotonnost: $\forall x_1, x_2 \in X$ platí: $x_1 \geq x_2 \Rightarrow x_1 R x_2$,
5. spojitost: $\forall x_0 \in X$ platí: množina $\{ x / x R x_0 \}$ a množina $\{ x / x_0 R x \}$ jsou uzavřené,
6. antisymetrie: $\forall x_1, x_2 \in X$ platí: $x_1 R x_2, x_2 R x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Je-li napr. preferenční relace tranzitivní, úplná a antisymetrická, mluvíme o relaci usporádání. Pripustíme-li existenci indiferentních netotožných variant (tj. vypustíme-li požadavek antisymetrie), získáme relaci kvaziusporádání. Splnuje-li preferenční relace všech prvních pet vlastností najednou, je definována užitková funkce $u(x)$ následovne:

$$u(x_1) > u(x_2) \Leftrightarrow x_1 P x_2,$$

$$u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 I x_2.$$

Takto definována je užitková funkce funkcí ordinální, tj. rozhodovatel ví, že varianta x je lepší než varianta y , ale neví, o kolik je lepší. Budeme-li nyní obe varianty chápat jako vektor, tj. $x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1m})$ a $x_2 = (x_{21}, \dots, x_{2m})$, lze analogicky definovat vícekritériální užitkovou funkci $u(x)$. Předpokládá se obvykle, že racionální rozhodovatel volí variantu, která mu přináší nejvyšší užitek neboli maximalizuje užitkovou funkci. Otázka je zda vubec existují způsoby, jakými by se dala užitková funkce kardinalizovat. Jeden z možných způsobu uvedu v následujícím příklade.

příklad 3.1 - metoda loterie Omezím se na jednokritériální případ. Necht má rozhodovatel volit mezi variantami (hodnoty mohou udávat napr. nabízenou cistou hodinovou mzdu v Kc): (35,40,48,55,70). Zakotví-li se hledaná užitková funkce v bodech s nejnižší a nejvyšší nabízenou mzdou $u(35)=0$ a $u(70)=1$, je možné uvažovat následující úlohu: získá-li rozhodovatel s pravdepodobností p mzdu 70 Kc a s pravdepodobností $(1-p)$ mzdu 35 Kc nebo s jistotou mzdu 40 Kc, při jaké hodnotě p

bude mezi obema nabídkami indiferentní? Užítky by při indiferenci rozhodovatele měly být v obou případech stejné, tj.

$$(1-p)u(35) + pu(70) = p = u(40).$$

Nevýhoda tohoto postupu je zřejmá: lze ho praktikovat pouze na konečný počet variant, určení pravděpodobnosti p je navíc pro rozhodovatele poměrně obtížné.

Obdobně si lze položit otázku, jaký existuje vztah mezi jednokriteriální a vícekriteriální užítkovou funkcí. Splňují-li charakteristiky určité předpoklady (jde především o požadavek jejich nezávislosti) a jsou-li k dispozici jednokriteriální užítkové funkce (získané napr. výše uvedeným způsobem), dá se vícekriteriální užítková funkce rozložit. Dekompozice může mít různé tvary (uvedené tvary platí pro tři charakteristiky), napr.

1. aditivní dekompozice: $u(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + u_3(x_3),$
2. vážená aditivní dekompozice: $u(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2) + \lambda_3 u_3(x_3),$
3. multiplikativní dekompozice:

$$u(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2) + \lambda_3 u_3(x_3) + k\lambda_1 \lambda_2 u_1(x_1) u_2(x_2) + k\lambda_1 \lambda_3 u_1(x_1) u_3(x_3) + k\lambda_2 \lambda_3 u_2(x_2) u_3(x_3) + k^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 u_1(x_1) u_2(x_2) u_3(x_3),$$

kde k a $\lambda_i, i=1,2,3$, jsou konstanty. Většina typu dekompozice vyžaduje tedy určení dalších konstant, které se získají obvykle interaktivními metodami (tem je věnována 7.kapitola).

S myšlenkou dekompozice vícekriteriální užítkové funkce pracuje i teorie sociálního úsudku (social judgement theory). Ta k určení konstant neužívá interaktivní metody, ale spoléhá téměř výlučně na regresní analýzu rozhodnutí z minulosti, případně výsledku rozhodnutí, která rozhodovatel učiní o nagenovaných situacích (napr. rozhodovateli se předloží kombinace variant a rozhodovatel vybere tu nejlepší. Toto se mnohokrát zopakuje a prvními volbami se proloží regresní křivka). Dekompozice vychází zpravidla z předpokládaného tvaru užítkové funkce $u(x_i)=x_i$. Konkrétní způsob dekompozice může být napr. (opet jsou uvedeny tvary pro tři charakteristiky)

1. lineární: $u(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$
2. konjunktivní: $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\lambda_1} + x_2^{\lambda_2} + x_3^{\lambda_3},$
3. logaritmický: $u(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 \log x_1 + \lambda_2 \log x_2 + \lambda_3 \log x_3.$

Obecně lze říci, že práce přímo s užitkovými funkcemi je poměrně nepraktická. V praxi se obvykle pracuje s úlohami typu maximalizovat zisk či minimalizovat náklady. Tyto úcelové funkce jsou vyjádřeny v konkrétních jednotkách a jaksí suplují užitkovou funkci: je v nich nepřímou zabudováno, že např. maximalizace zisku přináší i nejvyšší užitek.

3.2 OPTIMUM

Nyní bych se zastavila u klíčového pojmu optimum. O optimu se dá mluvit tehdy, jsou-li všechny varianty "meritelné" jedním měřítkem. Příkladem může být úloha nalézt takovou kombinaci výrobních vstupů, která za daných omezení minimalizuje celkové náklady. Každá kombinace je ocenitelná určitým množstvím měnových jednotek a optimální je taková kombinace, kde je toto ocenění minimální. Takové pojetí optima je ovšem zjednodušující a zidealizované - předpokládá totiž, že rozhodovateli jsou přesně známa omezení, že jsou úcelové funkce vzájemně souměřitelné a nejsou ve vzájemném konfliktu. Samotná omezení nemusejí být rozhodovateli obecně vůbec známa (vlivem nedostatku informací) a mohou se menit, je proto lepší mluvit o omezené optimalizaci, vázané na právě známou množinu dostupných variant. Stejně tak se mohou menit preference rozhodovatele, tj. varianta, která je považována za optimální, závisí na celé řadě faktorů. Optimum je relativní, obvykle neexistuje žádná absolutní metoda, která by dokázala objevit nějaké absolutní optimum. Rozhodne-li se rozhodovatel pro nějakou variantu na základě více kritérií, optimálnost rozhodnutí se obvykle projeví uspokojením a důvěrou v to, že byla nalezena optimální varianta. Důležité je tedy, aby rozhodovatel považoval zvolenou variantu za optimální.

Uvedla bych dále koncept paretovské optimality, který je založen na pojmu nedominovaná varianta (též paretovská, efektivní). Přípustná varianta je nedominovaná, pokud neexistuje jiná varianta, ve které nabývají všechny charakteristiky přinejmenším stejně preferovaných hodnot, přičemž nejméně u jedné charakteristiky hodnoty ostře preferované. Formálně zapsáno:

Varianta $y \in X$ je nedominovaná, jestliže pro každé $x \in X$, $x \neq y$ platí:

1. $y_j R_j x_j$, $j=1 \dots m$,
2. existuje j tak, že $y_j P_j x_j$.

Nedominované řešení nemusí vůbec existovat nebo jich může být konečné nebo nekonečné množství. Všechna nedominovaná řešení vyloučí z množiny X její podmnožinu nedominovaných řešení N . Hledání množiny N je v úlohách vícekritériální optimalizace věnována značná pozornost.

Podle toho, jaké informace o vztahu charakteristik jsou vyžadovány, lze metody komplexního vyhodnocování variant rozdělit na:

1. Metody, které nevyžadují žádné informace o vztahu charakteristik.
2. Metody, které vyžadují informace o žádoucích hodnotách charakteristik.
3. Metody, které vyžadují ordinální serazení charakteristik dle jejich relativní důležitosti.
4. Metody, které vyžadují kvantitativní vyjádření relativní důležitosti charakteristik.

3.3 METODY NEVYŽADUJÍCÍ INFORMACE O VZTAHU CHARAKTERISTIK

Za předpokladu, že jsou všechny charakteristiky vzájemně porovnatelné, kvantifikovatelné a převedené na stejnou měrnou jednotku, lze k výběru optimální varianty použít:

1. Metodu MAXIMIN. Ta za optimální považuje takovou variantu, která nabývá maximální hodnoty v charakteristice, která na celé množině variant nabývá nejmenší hodnoty ze všech charakteristik. Je tedy řešena úloha najít takovou variantu $x_j \in X$, pro kterou platí

$$\min_j x_{ij} = \max_k \min_j x_{kj}, \quad j = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots n.$$

2. Metodu MAXIMAX. Ta považuje za optimální variantu, ve které jedna z charakteristik nabývá nejvyšší hodnoty ze všech hodnot všech charakteristik na celé množině všech variant, tj. $x_j \in X$, pro kterou je

$$\max_j x_{ij} = \max_k \max_j x_{kj}.$$

Je zřejmé, že obe metody nevyužívají veškeré dostupné informace o jednotlivých variantách. o

3. Hurwiczovu metodu. Metoda kombinuje opatrný přístup metody MAXIMIN a optimistický přístup metody MAXIMAX. Za optimální je zvolena varianta, která maximalizuje výraz

$$\alpha \min_j x_{ij} + (1 - \alpha) \max_j x_{ij}$$

kde $0 \leq \alpha \leq 1$, α se dá interpretovat jako "sklon k opatrnosti".

3.4 METODY VYŽADUJÍCÍ INFORMACE O ŽÁDOUCÍCH HODNOTÁCH CHARAKTERISTIK

Tyto metody se používají k rozkladu množiny všech variant na dve podmnožiny: podmnožinu uspokojivých variant a podmnožinu neuspokojivých variant. Pro každou charakteristiku je nutné zadat žádoucí hodnotu, napr. minimální přijatelnou hodnotu, které by měla charakteristika nabýt. Za uspokojivou může být považována taková varianta x_j z množiny všech variant, pro kterou platí

$$x_{ij} \geq x_j$$

$j=1 \dots m$, kde x_j označuje minimální přijatelnou hodnotu j té charakteristiky. Volba žádoucích hodnot charakteristik je klíčovým problémem těchto metod, podobně jako v příbuzných metodách cílového programování (4.2.2).

3.5 METODY VYŽADUJÍCÍ ORDINÁLNÍ SERAZENÍ CHARAKTERISTIK

Metody vycházejí z předpokladu, že je rozhodovatel schopen seradit charakteristiky dle jejich relativní důležitosti, napr. sestupně od nejdůležitější charakteristiky k nejméně důležité, označím $R_1 \dots R_m$. Uvedu nejznámější z metod:

lexikografická metoda: Metoda vychází z počáteční množiny variant X , ze které je vyloučena podmnožina $X_1 \subset X$ následovně:

$$X_1 = \{ y \in X / y R_1 x \text{ pro } \forall x \in X \}.$$

Pokud tato množina není jednoprvková, je analogicky sestrojena množina X_2 . Algoritmus se opakuje, dokud není nalezeno řešení nebo dokud není sestrojeno

m podmnožin (řešením jsou pak všechny varianty z poslední podmnožiny X_m). Metoda nevyžaduje, aby byly všechny charakteristiky vzájemně porovnatelné a kvantitativní.

3.6 METODY VYŽADUJÍCÍ KVANTITATIVNÍ OHODNOCENÍ RELATIVNÍ DULEŽITOSTI CHARAKTERISTIK

3.6.1 VÁHY

Jedním z nejčastějších způsobů vyjádření rozdílné důležitosti jednotlivých charakteristik v úlohách vícekritériální optimalizace jsou váhy těmto charakteristikám přiřazené. V této subkapitole se budu zabývat způsoby odhadu těchto vah. Všechny metody mají rozhodovateli ulehčit ujasnit si strukturu svých preferencí - přímého odhadu vah není totiž rozhodovatel většinou schopen. Většina těchto metod je založena na seřazování, případně párovém porovnávání důležitosti relevantních charakteristik. Některé z uvedených metod jsou využitelné při skupinovém ohodnocování důležitosti charakteristik (prvních šest metod), jiné vycházejí pouze z hodnocení jediného rozhodovatele. Vektor vah bude nadále značen $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_m)$.

1. Metoda poradí. Necht každý z hodnotitelů (je jich s) usporádá charakteristiky vzestupně dle jejich důležitosti a každé charakteristice přiřadí její pořadí v tomto usporádání (nejdůležitější charakteristika získá ocenění m , nejméně důležitá ocenění 1). Váha j -té charakteristiky se pak vypočítá následovně:

$$r_j = \sum_{k=1}^s r_{kj},$$

$$p_j = \frac{r_j}{\sum_{j=1}^m r_j},$$

kde r_{kj} je pořadí j -té charakteristiky v seřazení k -tého hodnotitele.

2. Bodovací metoda. Pro použití bodovací metody je nutné, aby byla předem zvolena bodovací stupnice (rozsah, jemnost apod.). Důležitost j -té charakteristiky ohodnotí k -tý hodnotitel na této stupnici nějakým číslem w_{kj} . Váha přiřazená tímto hodnotitelem j -té charakteristice je

$$p_{kj} = \frac{w_{kj}}{\sum_{j=1}^m w_{kj}}$$

Váha prirazená této charakteristice skupinou hodnotitelu je

$$p_j = \frac{\sum_{k=1}^s p_{kj}}{\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m p_{kj}}$$

3. Metoda párového porovnání. Metoda vychází z párového porovnání důležitosti charakteristik, což může být pro hodnotitele snazší než přímé vzestupné serazení charakteristik dle důležitosti. Metoda se užívá ve dvou modifikacích:

a) neúplná: k-tý hodnotitel porovná po dvojicích charakteristiky R_j a R_i , $j < i$, $j=1 \dots m-1$, $i=2 \dots m$. Je-li R_j důležitější než R_i , je $w_{kji} = 1$, ve všech ostatních případech (stejná důležitost či nesrovnatelnost) je $w_{kji} = 0$. Definuje-li se

$$w_{kj} = \sum_{i>j} w_{kji}$$

(w_{kj} tedy udává počet charakteristik, které hodnotitel považuje za méně důležité než R_j), pak váha prirazená k-tým hodnotitelem j-té charakteristice je

$$p_{kj} = \frac{w_{kj}}{m(m-1)/2}$$

Získají-li se tyto váhy od všech hodnotitelu, je výsledná váha

$$p_j = \frac{\sum_{k=1}^s p_{kj}}{\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^m p_{kj}}$$

b) úplná: Metoda se provádí obdobně jako neúplná metoda. Rozdíl je v tom, že porovnání probíhá obousměrně, tj. porovnává se nejen důležitost charakteristik

R_j a R_i , ale i R_i a R_j . Celkový počet porovnání se tak zmení z $m(m-1)/2$ na $m(m-1)$.

4. Metoda postupných porovnáí. I tato metoda se používá v několika modifikacích, uvedu jednu z nich. Rozhodovatel seradí charakteristiky sestupne dle jejich duležitosti a každé charakteristice R_j priradí reálné číslo v_j (predbežné ocenení) tak, aby platilo: je-li R_j považována za duležitejší než R_i , je $v_j > v_i$, jsou-li obe charakteristiky stejne duležité, je $v_j = v_i$. Metoda pracuje s predpokladem aditivity: duležitost kombinace charakteristik R_j a R_i je ocenena souctem $v_j + v_i$. Prubeh metody je následující: duležitost v usporádání výše stojící charakteristiky porovná rozhodovatel s duležitostí všech dvojkombinací níže stojících charakteristik a predbežné ocenení charakteristiky se případne upraví tak, aby platil požadavek na ocenení uvedený výše. Váha j -té charakteristiky se pak vypocítá:

$$p_j = \frac{v_j}{\sum_{j=1}^m v_j}.$$

5. Metoda usporádání diferencí. k -tý hodnotitel usporádá charakteristiky dle duležitosti (sestupne od nejduležitejší k nejméne duležité), $R_1 > \dots > R_m$. Pro každou dvojici v tomto usporádání sousedních charakteristik (R_j, R_{j+1}), $j=1 \dots m-1$, musí dále urcit rozdíl v duležitosti $\Delta R_j = R_j - R_{j+1}$ a tyto diference musí také usporádat. Vektor vah \mathbf{p} se získá řešením úlohy lineárního programování (4.2)

$$\begin{aligned} & \max \varepsilon \\ & \text{za omezení} \\ & \sum_{i=1}^m p_i = 1, \\ & p_j \geq p_{j+1} + \varepsilon, \quad j=1 \dots m-1, \\ & p_i - p_{i+1} \geq p_j - p_{j+1} + \varepsilon, \end{aligned}$$

kde indexy i, j odpovídají usporádání diferencí. Metoda pracuje s větším množstvím informací o preferencích rozhodovatele.

6. Strom duležitosti charakteristik. Metoda vychází z predpokladu, že charakteristiky vytvářejí hierarchickou strukturu. Odkrytím této struktury je možné se propracovat k elementárním charakteristikám. Výsledná váha charakteristice prirazená závisí

na jejím umístění v hierarchické strukture. Každé charakteristice, která se nachází ve druhém a nižším hierarchickém stupni, se dají přiřadit dvě váhy: váha uzlová, která je odvozena ze vztahu $w_i = w_{i-1} \cdot k_i$ k charakteristice stojící v hierarchické strukture o stupeň výše, a váha celková, která vznikne vynásobením uzlové váhy a celkové váhy, přiřazené w_{i-1} o stupeň výše stojící charakteristice. Uzlové váhy je nutné odhadnout některou ze zde uvedených metod.

Tímto postupem lze mnohdy též rozložit kvalitativní charakteristiky na charakteristiky kvantitativní, např. charakteristika "stav životního prostředí za uplynulý rok" se dá rozložit na charakteristiky "spad popílku v t/km²", "průměrná denní emise SO₂ v μg/m³" atd.

7. Saatyho metoda. Metoda vyžaduje párové porovnání důležitosti charakteristik R_i a R_j , $i < j$, $i=1\dots m-1$, $j=2\dots m$, a ocenění rozdílu v jejich důležitosti celým číslem b_{ij} z intervalu 1-9 (1 = charakteristiky jsou stejně důležité, 9 = i-tá charakteristika je absolutně důležitější než j-tá charakteristika). Charakteristiky se porovnávají pouze jednosměrně, porovnání v opačném směru je oceněno převrácenou hodnotou k hodnotě původního ocenění ($b_{ji}=1/b_{ij}$, $b_{ii} = 1$ definicně). Získá se tak matice $\mathbf{B}_{m \times m}$, jejíž prvek b_{ij} se dá interpretovat jako poměr p_i / p_j . Lze dokázat, že za úplné konzistence preferencí hodnotitele platí $\mathbf{Bp} = mp$. V praxi se vektor vah \mathbf{p} aproximuje vlastním vektorem, který odpovídá největšímu vlastnímu číslu matice \mathbf{B} .

8. Metoda nejmenších čtverců. Tato metoda také vychází z matice párových porovnání důležitosti charakteristik \mathbf{B} . Prvek b_{ij} matice \mathbf{B} je považován za odhad poměru p_i / p_j . Úlohou je minimalizovat výraz

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (b_{ij} - p_i)^2$$

za podmínky $\sum_{j=1}^m p_j = 1$.

Převedením na úlohu Lagrangeova multiplikátoru lze dojít k soustavě $m+1$ lineárních rovnic pro $m+1$ neznámých. Jejím vyřešením se získají hledané váhy.

9. Metoda LINMAP. Metoda vychází z párového porovnání variant. Předpokládá se existence ideální varianty $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ (3.6.2). Předpokládá-li se dále, že

preferovanější je varianta bližší ideální variante, lze definovat váženou euklidovskou vzdálenost varianty $\mathbf{x}_i \in X$ od ideální varianty (3.6.2)

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) = \left(\sum_{j=1}^m p_j (x_{ij} - x_j^*)^2 \right)^{1/2}.$$

Jde o to nalézt takový vektor vah \mathbf{p} , aby byly vypočítané vzdálenosti konzistentní s párovým porovnáním variant. Konzistentnost lze zapsat následovně: je-li $\Omega = \{ i, j \}$ množina všech dvojic indexů takových, že i -tá varianta je preferována před j -tou, pak konzistentnost s párovým porovnáním nastane tehdy, je-li $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) \geq d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}^*)$ pro všechny dvojice indexů (i, j) z množiny Ω . Definuje-li se pro každou dvojici indexů (i, j) z množiny Ω číslo $k_{(i,j)} = \max(0; d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) - d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}^*))$, lze míru porušení konzistentnosti popsat např. výrazem

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} k_{(i,j)}$$

Úloha minimalizace tohoto výrazu je opět převoditelná na úlohu lineárního programování.

10. Entropická metoda. Entropie je měřítko množství informace, kterou daný informační zdroj přenáší. Tato metoda je založena na myšlence, že čím více informací charakteristika přenáší, tím větší váhu by měla mít. Uvedu zde jeden z možných přístupů: existuje-li ideální varianta $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)$, (3.6.2), kde bez újmy na obecnosti $x_j^* = \max_i x_{ij}$, $i=1, \dots, n$, je možné j -té charakteristice přiřadit vektor $\mathbf{d}_j = (d_{1j}, \dots, d_{nj})$ tak, že $d_{ij} = x_{ij} / x_j^*$, a číslo

$$D_j = \sum_{i=1}^n d_{ij}.$$

Jako měřítko entropie j -té charakteristiky se definuje výraz

$$e(\mathbf{d}_j) = -K \sum_{i=1}^n (d_{ij} / D_j) \ln(d_{ij} / D_j),$$

kde K je kladná konstanta. Zvolí-li se $K = 1 / \ln n$, platí $0 \leq e(\mathbf{d}_j) \leq 1$. Celková entropie je

$$E = \sum_{j=1}^m e(\mathbf{d}_j).$$

Protože platí, že čím větší je $e(\mathbf{d}_j)$, tím méně informací j-tá charakteristika přenáší, je výsledná váha j-té charakteristiky odvozena z výrazu

$$p_j = \frac{(1 - e(\mathbf{d}_j))}{m - E},$$

kde dělení výrazem $(m - E)$ slouží k normalizaci na $\sum_{j=1}^m p_j = 1$.

Metoda se dá využít i v případě, že máme nějaké apriorní informace o vahách, vyjádřené vektorem \mathbf{v} . Výslednou váhu lze definovat napr. jako součin

$$p_j' = \frac{p_j v_j}{\sum_{j=1}^m p_j v_j}.$$

Výhodou metody je, že od rozhodovatele nevyžaduje žádná porovnávání.

3.6.2 JEDNODUCHÉ METODY AGREGACE CHARAKTERISTIK

Pod pojmem agregace charakteristik se rozumí nalezení agregující charakteristiky R , založené na charakteristikách $R_1 \dots R_m$ a obvykle na vahách (přímo zadáných nebo odhadnutých některou z metod uvedených v předcházející subkapitole). Na tomto místě uvážené metody bývají nazývány jednoduché metody agregace charakteristik. Další velkou skupinu tvoří metody založené na prázích citivosti (6.3.5).

1. Metoda bázecké varianty. Metoda vyžaduje, aby rozhodovatel vybral z množiny všech variant jednu variantu jako bázeckou, označím $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m})$. Každé z variant \mathbf{x}_1 lze pak přiřadit vektor hodnot

$$\mathbf{r}_i = (x_{i1}/x_{01}, \dots, x_{im}/x_{0m}).$$

Výslednou relaci lze definovat pomocí výrazu

$$r_i = \frac{\sum_{j=1}^m p_j x_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_j x_{0j}}, \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1.$$

Každé variante je tak přiřazeno reálné číslo, výsledná relace je uspořádání. Vzhledem k tomu, že metoda pracuje s poměry hodnot jednotlivých charakteristik, odpadá problém nesouměřitelnosti jednotek, ve kterých jsou jednotlivé charakteristiky uváděny. Zároveň si metoda vynucuje kardinalizaci ordinálních charakteristik.

2. Metoda vzdálenosti od ideální varianty. Výklad této metody vyžaduje bližší prozkoumání pojmu ideální varianta a vzdálenost.

Rozhodovatel mívá představu o tom, jakých hodnot by měly nabývat jednotlivé charakteristiky v ideálním případě. Obvykle je však ve své volbě omezen a ideální variantu může vytvořit pouze na základě variant, které jsou mu k dispozici. O ideální variante se mluví proto, že je obvykle nedosažitelná. Vzhledem k tomu, že se množina dostupných variant může měnit (např. přibývají varianty díky technologickým zdokonalením nebo naopak varianty ubývají, protože je rozhodovatel považuje za příliš vzdálené od ideální varianty), mění se i sama ideální varianta a mluví se o posunutém ideálu. Koncept ideální varianty je velmi důležitý, v tomto textu se budu na ideální variantu ještě nekolikrát odvolávat. Ideální varianta bude nadále značena symbolem \mathbf{x}^* .

Zcela obecně lze vzdálenost varianty $\mathbf{x}_i \in X$ od ideální varianty \mathbf{x}^* definovat např.

$$d_\lambda(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) = \left(\sum_{j=1}^m p_j^\lambda (x_{ij} - x_j^*)^\lambda \right)^{1/\lambda},$$

kde $\lambda = 1 \dots +\infty$. Vzdálenost takto chápaná je relativní. Čím větší je hodnota konstanty λ , tím větší důraz je kladen na největší odchylku mezi hodnotami charakteristiky v i -té a v ideální variante (v krajním případě $\lambda = +\infty$ je vzdálenost určována pouze maximální váženou odchylkou). V reálném životě nejčastěji užívaná euklidovská vzdálenost odpovídá hodnotám $\lambda = 2$ a $p_j = 1, j=1 \dots m$. Chceme-li tedy posuzovat optimálnost varianty na základě její vzdálenosti od ideální varianty (obvykle se předpokládá, že čím menší je tato vzdálenost, tím je varianta preferovanější), je nutné zvolit nějaké λ . Metoda vyžaduje, aby charakteristiky měly kardinální povahu. Relace takto vzniklá je opět uspořádání. Optimální řešení získané tímto způsobem bývá nazýváno kompromisní řešení.

Podobne lze posuzovat optimálnost varianty $\mathbf{x}_i \in X$ na základe její vzdálenosti od antiideální varianty (tady se předpokládá, že čím je tato vzdálenost větší, tím je tato varianta preferovanější). I tato relace je usporádání. Použití obou metod obecně nevede k výberu stejné optimální varianty.

Problém nesoumeritelnosti jednotek lze vyřešit užitím relativní vzdálenosti

$$d_\lambda(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) = \left(\sum_{j=1}^m p_j^\lambda \left((x_{ij} - x_j^*) / x_j^* \right)^\lambda \right)^{1/\lambda} .$$

příklad 3.2 Mejsme tři varianty ohodnocené podle dvou charakteristik $\mathbf{a}=(6,7)$, $\mathbf{b}=(10,2)$, $\mathbf{c}=(5,4)$. Ideální variantu lze definovat napr. jako maxima hodnot, která jednotlivé charakteristiky nabývají, je tedy $\mathbf{x}^*=(10,7)$. Je-li kritériem rozhodnutí minimalizace euklidovské vzdálenosti, je nejpreferovanější variantou \mathbf{a} , nejméne preferovanou \mathbf{c} . Pritom tyto preference vznikají ne přímo srovnáním jednotlivých variant, ale prostřednictvím srovnání s referenční ideální variantou \mathbf{x}^* . Pridáním varianty $\mathbf{d}=(12,3)$ se ideál posune na $\mathbf{x}^*=(12,7)$. Odpovídající poradí variant je $\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$. Je videt, že pridání nové varianty vedlo ke změne preferencí mezi variantami \mathbf{a} a \mathbf{b} .

3. Metoda váženého souctu poradí. Varianty se seradí vzestupne dle jednotlivých charakteristik, získá se tak m posloupností. Variante $\mathbf{x}_i \in X$ se dá priradit m -tice reálných císel $\mathbf{r}_i=(r_{i1} \dots r_{im})$, udávající poradí varianty v každé z posloupností (čím lepší hodnocení varianty podle příslušné charakteristiky, tím vyšší poradové číslo). Vážený soucet techto poradí udává výsledné ohodnocení varianty

$$r_i = \sum_{j=1}^m p_j r_{ij} .$$

Výsledná relace je usporádání. Metoda je užitelná i pro ordinální charakteristiky.

4. Bodovací metoda. Metoda je analogická k metode váženého souctu poradí s tím rozdílem, že místo poradí je uvažováno obodování varianty dle jednotlivých charakteristik na predem zvolené stupnici.

5. Metoda postupných permutací. Metoda hledá takovou permutaci variant x_1, \dots, x_n , aby platilo, že varianta první v poradí je preferována před variantou druhou v poradí atd. Pro každou dvojici variant $x_i, x_j \in X$ se definuje množina indexu charakteristik I_{ij} , podle kterých je varianta x_i preferována před variantou x_j . Definuje se součet vah těchto charakteristik

$$r_{ij} = \sum_{k \in I_{ij}} p_k.$$

Pro výslednou permutaci musí platit, že výraz

$$\sum_{i \leq j} r_{ij} - \sum_{j > i} r_{ij}$$

musí být maximalizován. Výsledná relace tímto způsobem získaná je tranzitivní, nemusí být ale jednoznačně určena. Metoda je výpočetně rozsáhlá. Je využitelná i pro ordinální charakteristiky.

5. Dvoustupnová Saatyho metoda. V předcházející subkapitole jsem popsala, jakým způsobem přistupuje Saatyho metoda k odhadu vah jednotlivých charakteristik. Tento odhad vah lze považovat za první stupeň použití metody. Jestliže se v prvním stupni párove porovnávala důležitost jednotlivých charakteristik, pak ve druhém stupni se párove porovnávají varianty z hlediska každé charakteristiky R_j . Tímto opakovaným použitím Saatyho metody se tak každé variante přiřadí matice "vah". Každá z těchto "vah" vyjadřuje důležitost varianty z hlediska příslušné charakteristiky. Dále lze postupovat jako v metodě váženého součtu poradí (bod 3).

4.KAPITOLA - VEKTOROVÁ OPTIMALIZACE

4.1 HLEDÁNÍ EXTRÉMU FUNKCE

Tato subkapitola je krátkou rekapitulací pojmu a metod, které se používají v matematice k hledání extrému funkce. Extremalizační úlohy s omezeními ve tvaru nerovností, které vylenují množinu přípustných řešení X (při vektorové optimalizaci se dává přednost termínu "řešení" před termínem "varianta"), jsou úlohy matematického programování. Jsou-li účelová funkce i omezující funkce lineární, mluví se o lineárním programování. Je-li účelová funkce kvadratická, jde o kvadratické programování. V obecném případě jde o programování nelineární. Řešením úlohy matematického programování se rozumí takové x , které splňuje všechna omezení a současně je globálním extrémem účelové funkce na množině přípustných řešení X .

K hledání extrému funkce vázaných na množinu omezení (tj. vázaných extrému funkce) ve tvaru nerovností lze užít Kuhn - Tuckerova teorému. Jsou-li omezení ve tvaru rovností, lze užít metodu Lagrangeových multiplikátorů. Tato metoda je speciálním případem obecnějšího Kuhn-Tuckerova teorému.

V případě, že se mají hledat extrémy účelové funkce a omezení se neuvažují, jde o úlohu hledání volných extrému. Kromě klasické metody, která hledá body, ve kterých jsou všechny parciální derivace prvního řádu rovny nule, existuje celá rada metod, které řešení hledají iteracně. Patří sem gradientní metody, např. gradientní metoda s dlouhým krokem, které také vycházejí z informací ukrytých v prvních parciálních derivacích účelové funkce. Posun z nějakého zvoleného počátečního bodu nastává ve směru nejvyššího nárůstu účelové funkce. Rychlejší konvergenci k řešení zaručuje Newtonova metoda, která je založena na druhých parciálních derivacích účelové funkce. Metody, které spojují gradientní metodu s dobrou konvergencí Newtonovy metody, jsou kvazintonovské metody. Z dalších metod je možné uvést metody konjugovaných směrů.

Další velká skupina metod nevychází z výpočtu derivací, ale opírá se o srovnávání funkčních hodnot účelové funkce. Jde o komparativní metody. Mezi ně patří např. metoda přímé komparace.

příklad 4.1 Úloha nalézt globální extrém kvadratické účelové funkce

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 - 3x_1^2 - x_2^2.$$

1. Rešení klasickým způsobem. Obe první parciální derivace funkce se položí rovny nule:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 5 - 6x_1 = 0; \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 6 - 2x_2 = 0.$$

Pomocí Hessiany matice se dá overit, že bod $\mathbf{x} = (5/6, 3)$ není sedlovým bodem a je tedy hledaným globálním extrémem (globálním maximem). Funkce $f(x_1, x_2)$ nabývá v tomto bode funkční hodnoty 329/36.

2. Rešení gradientní metodou s dlouhým krokem. Zvolí se nějaký počáteční bod, napr. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Soudadnice nového bodu \mathbf{x}_1 se získají ze vztahu

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \eta_0 \nabla f(\mathbf{x}_0),$$

kde η_0 je voleno tak, aby byl výraz $f(\mathbf{x}_1)$ maximalizován. Výraz $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ označuje hodnotu gradientu funkce $f(x_1, x_2)$ v bode \mathbf{x}_0 . V tomto příklade je gradient

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 5 - 6x_1 \\ 6 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Je tedy

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_0 \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$f(\mathbf{x}_1) = f(5\eta_0, 6\eta_0) = 61\eta_0 - 111\eta_0^2,$$

$$\eta_0 = 61/222,$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 5,373 \\ 1,649 \end{pmatrix}.$$

Obdobným způsobem lze získat

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0,63 \\ 2,268 \end{pmatrix}$$

atd. Zřetelnou nevýhodou metody je pomalá konvergence k řešení.

3. Rešení Newtonovou metodou. I zde je nutné zvolit nějaký počáteční bod, opět napr. $x_0 = (0, 0)$. Bod x_1 se získá ze vztahu

$$x_1 = x_0 - [\nabla^2 f(x_0)]^{-1} \nabla f(x_0),$$

kde symbol $\nabla^2 f(x_0)$ označuje hodnotu Hessovy matice v bode x_0 . V tomto příklade má matice tvar:

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Je tedy

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0,63 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rešení je nalezeno v jednom kroku.

4.2 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

4.2.1 SIMPLEXOVÁ METODA

Jednou z nejznámejších metod užívaných v úlohách lineárního programování je simplexová metoda. Metoda slouží k hledání rohových nedominovaných řešení. Úlohu lineárního programování lze bez újmy na obecnosti zapsat následovně:

$$\max Cx$$

za omezení

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

kde $\mathbf{0}$ je nulový vektor. Prvek c_{ij} matice \mathbf{C} udává nárůst (pokles) i -té úcelové funkce $f_i(\mathbf{x})$, $i=1\dots l$, při nárůstu j -té promenné o jednotku. Prvek a_{kj} matice \mathbf{A} udává obdobně nárůst spotřeby k -tého zdroje ($k=1\dots z$) při nárůstu j -té promenné o jednotku (je to tedy technologický koeficient, matice \mathbf{A} bývá nazývána technologická matice). Vektor \mathbf{b} je vektor omezení kladených na uvažované zdroje (takto zadaná úloha s nerovnostmi znamená, že je přípustné nevyužívání zdroje). Podstatné je, že jak maximalizované úcelové funkce, tak omezení mají lineární tvar. Dá se dokázat, že množina všech přípustných řešení je konvexní polyedrická množina. Množina nedominovaných řešení je její podmnožinou a platí, že krajní body množiny nedominovaných řešení jsou i krajními body množiny přípustných řešení.

Praktický postup použití simplexové metody ukáží na jednoduchém příklade.

příklad 4.2 Hrackárská firma vyrábí dva druhy hracek. K jejich výrobě používá dva odstíny plyše: tmavé a světle hnědý. Na výrobu jedné plyšové opice je třeba 80 jednotek tmavé a 60 jednotek světle hnědého plyše, na výrobu jednoho plyšového medveda 30 jednotek tmavé a 40 jednotek světle hnědého plyše. Firma má k dispozici 2400 jednotek tmavé hnědého a stejné množství světle hnědého plyše. Jedna prodaná opice přináší firmě zisk 120 Kc, jeden medved 140 Kc. Výroba jedné opice přináší firmě časovou úsporu 30 minut, výroba medveda 15 minut. Jaké množství opic a medvedu má firma vyrábět, aby byl maximalizován zisk a maximalizována časová úspora?

Snadno se ze zadání nahlédne, označí-li se $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, kde x_1 je množství vyráběných opic a x_2 množství vyráběných medvedu, že

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 120 & 140 \\ 30 & 15 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 80 & 30 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 2400 \end{pmatrix}.$$

Obe úcelové funkce mají být maximalizovány.

Úloha je tedy:

$$\max 120x_1 + 140x_2 \quad (= f_1(x_1, x_2))$$

$$\max 30x_1 + 15x_2 (= f_2(x_1, x_2))$$

za omezení

$$80x_1 + 30x_2 \leq 2400$$

$$60x_1 + 40x_2 \leq 2400$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0.$$

Úlohu lze snadno řešit graficky. Rohové body vzešlé z omezení jsou čtyři, jejich souřadnice jsou $A[0, 0]$, $B[30, 0]$, $C[120/7, 240/7]$, $D[0, 60]$. Funkce $f_1(x_1, x_2)$ je maximalizována v bodě D, funkční hodnota v tomto bodě je $f_1(0, 60) = 8400$. Funkce $f_2(x_1, x_2)$ je maximalizována v bodě C, funkční hodnota v tomto bodě je $f_2(120/7, 240/7) = 7200/7$. Nedominovaných řešení je v tomto případě nekonečně mnoho, nalézají se na spojnici bodu C a D (patří k nim i oba krajní body). Ideálním a nedosažitelným bodem vzhledem k hodnotám obou účelových funkcí je bod $X^*[45/6, 375/7]$. Ke stejnému výsledku lze dojít při použití simplexové metody.

Postup:

Základem řešení je rozdělení promenných na bázické a nebázické. Hodnota každé nebázické promenné je rovna nule. Hodnoty bázických promenných tvoří řešení. Je-li z omezení a m promenných, pak jen z promenných může být nezáporných (v případě, že je hodnota některé bázické promenné rovna nule, jde o degenerované řešení). Jinými slovy počet bázických promenných je roven počtu omezení. Zbýlých ($m - z$) promenných je nebázických. Před vyplněním počáteční simplexové tabulky je třeba doplnit výchozí omezení na rovnosti přidáním doplňkových promenných x_3 a x_4 :

$$80x_1 + 30x_2 + x_3 = 2400$$

$$60x_1 + 40x_2 + x_4 = 2400$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0.$$

V tomto případě je tedy $m = 4$, $z = 2$, do báze budou vstupovat dvě promenné, přičemž v první tabulce budou těmito promennými přidány doplňkové promenné.

bázická promenná	x_1	x_2	x_3	x_4	hodnota báz.prom.
x_3	80	30	1	0	2400
x_4	60	40	0	1	2400
	-120	-140	0	0	0
	-30	-15	0	0	0

Tabulka 4.1: Počáteční simplexová tabulka

První dva řádky v tabulce jsou řádky omezení, poslední dva řádky jsou řádky účelových funkcí (též kriteriální řádky). Koeficienty v rádcích omezení odpovídají přesně koeficientům u jednotlivých promenných v omezeních úlohy (tj. odpovídají technologickým koeficientům a_{kj}). Koeficienty u nebázických promenných x_1 a x_2 v kriteriálních rádcích odpovídají v absolutní hodnotě koeficientům u těchto promenných v původních účelových funkcích (tj. c_{ij}), mají ale opačné znaménko. Hodnota bázických promenných odpovídá vektoru **b**. Počáteční simplexová tabulka vede k řešení (0,0,2400,2400). Hodnota obou účelových funkcí je v tomto bodě rovna nule, čemuž odpovídají nuly v posledním sloupci tabulky v kriteriálních rádcích. Toto řešení je ovšem dominováno. Platí totiž

pravidlo číslo 1: Existuje-li nebázická promenná, u které jsou v kriteriálních rádcích pouze nekladné koeficienty, přičemž alespoň jeden z nich je nenulový, pak je řešení dominováno.

Zde toto pravidlo splňují obe nebázické promenné. Zápornost koeficientu naznačuje, že zavedení příslušné promenné do báze povede ke zlepšení hodnot obou účelových funkcí. Vybere se promenná x_2 , protože hodnota koeficientu -140 povede k největšímu nárůstu účelové funkce. Tím je vybrán klíčový sloupec. Klíčový rádek je ten, ve kterém je podíl hodnoty bázické promenné a koeficientu v klíčovém sloupci minimální (uvažují se pouze kladné koeficienty v klíčovém sloupci). Zde je klíčovým rádkem rádek odpovídající bázické promenné x_4 (příslušný poměr je 60). Promenná x_4 tedy bázi opustí a do báze bude zavedena promenná x_2 . Tabulku je nutno upravit (povoleny jsou operace násobení a přičítání řádku):

bázická promenná	x_1	x_2	x_3	x_4	hodnota báz.prom.
x_3	35	0	1	-3/4	600
x_2	3/2	1	0	1/40	60
	90	0	0	7/2	8400
	-15/2	0	0	3/8	900

Tabulka 4.2: První upravená simplexová tabulka

Řešení odpovídající této tabulce je $(0, 60, 600, 0)$, odpovídá tedy bodu D. Koeficienty v prvním kriteriálním řádku jsou kladné, funkce $f_1(x_1, x_2)$ je maximalizována, řešení je nedominované. Zavedením jakékoli nebázické promenné do báze se hodnota funkce $f_1(x_1, x_2)$ zhorší. Záporný koeficient u nebázické promenné x_1 naznačuje, že zavedení x_1 do báze povede ke zlepšení funkční hodnoty funkce $f_2(x_1, x_2)$.

Klíčový řádek je řádek odpovídající promenné x_3 . Ta z báze vystupuje, vstupuje do ní promenná x_1 .

bázická promenná	x_1	x_2	x_3	x_4	hodnota báz.prom.
x_1	1	0	1/35	-3/140	120/7
x_2	0	1	-3/70	-33/560	240/7
	0	0	-18/7	38/7	48000/7
	0	0	3/14	3/14	7200/7

Tabulka 4.3: Druhá upravená simplexová tabulka

Z tabulky je zřejmé, že řešením je $(120/7, 240/7, 0, 0)$, které odpovídá bodu C. Funkce $f_2(x_1, x_2)$ dosáhla maxima, řešení je opět nedominované. Zavedení nebázické x_3 by vedlo k tabulce 4.2, algoritmus je u konce. Úloha má dve nedominovaná rohová řešení, představovaná body C a D.

K rozhodnutí, zda je řešení nedominované nebo dominované, lze použít ještě pravidla číslo 2:

Existuje-li nebázická promenná, u které jsou v kriteriálních rádcích pouze nezáporné koeficienty, z nichž alespoň jeden je nenulový, pak zavedení této promenné do báze povede k dominovanému řešení.

Nedominovanost řešení lze overit též testem nedominování. V případě bodu D by šlo o úlohu nalézt takové d_1 a d_2 , která maximalizují výraz

$$\sum_{i=1}^2 d_i$$

za omezení

$$\begin{aligned}80x_1 + 30x_2 + x_3 &= 2400 \\60x_1 + 40x_2 + x_4 &= 2400 \\120x_1 + 140x_2 - d_1 &\geq 8400 \\30x_1 + 15x_2 - d_2 &\geq 900,\end{aligned}$$

a při nezápornosti všech promenných.

Tuto úlohu lze opět řešit simplexovou metodou (nerovnosti v omezeních je opět nutné nahradit rovnostmi přidáním dalších doplňkových promenných x_5 a x_6). V případě, že je dané řešení skutečně nedominované, je řešením této úlohy opět overované řešení a suma odchylek d_i je rovna nule (v opačném případě je tato suma kladná).

V případě, že jsou omezení ve formulaci úlohy zadány již jako rovnosti (tj. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$), lze metodu též použít. Jde o techniku pomocné báze. Přidají se opět doplňkové promenné a k původním úcelovým funkcím přibude funkce nová, která minimalizuje součet těchto doplňkových promenných (obdobně jako u testu nedominování). Minimalizaci tohoto součtu musí být přiřazena první priorita (4.2.2).

Pomocí simplexové metody lze nalézt všechna rohová řešení, bez ohledu na to, zda jsou nebo nejsou dominovaná (využije se principu úplné evidence sousedu, tj. u každého řešení se hledají všechna sousední řešení, nejenom to, které vede k největšímu nárůstu úcelových funkcí). Existují i jiné metody, kterými se dají hledat krajní body konvexních polyedrických množin, např. metoda úplného výpočtu.

Jak je videt na příklade, simplexová metoda nalezne nedominovaná rohová řešení, nedává ale návod k tomu, jakým způsobem by rozhodovatel mohl volit optimální řešení (neplatí v případě, že je nedominované rohové řešení pouze jedno). Za optimální řešení lze zvolit napr. takové nedominované řešení, které minimalizuje relativní euklidovskou vzdálenost od ideálního bodu (3.6.2).

4.2.2 LEXIKOGRAFICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Nejdříve se zastavím u pojmu cílové programování. Princip je následující: rozhodovatel předem specifikuje, jakých cílových hodnot by mely dosáhnout úcelové funkce, jaké čerpání zdroju je žádoucí apod. Řešením je takové $\mathbf{x} \in X$, která minimalizuje odchylky od těchto cílových hodnot. Hlavní problém úloh tohoto typu spočívá v apriorním určení cílových hodnot. Existuje totiž nebezpečí, že budou stanoveny příliš vysoko (za omezení jich nelze vůbec dosáhnout) nebo příliš nízko (za omezení lze dosáhnout lepších hodnot). Druhá z těchto možností bývá spojována s konceptem dostatečnosti (satisficing). Spokojení se napr. s nižšími hodnotami úcelových funkcí než jaké dovolují omezení je v jistém smyslu plýtváním. Racionální rozhodovatel, který zná omezení rozhodovacího problému, proto zřejmě bude cílové hodnoty stanovovat tak, aby se pohybovaly na hranici realizovatelnosti. Do popředí se tak dostává významnost prozkoumávání, příp. zvetšování množiny dostupných variant.

V následujícím příklade ukáži, jakým způsobem se dá princip cílového programování použít v úlohách lineárního programování (při využití simplexové metody). Jde o lexikografické programování. Rozhodovatel musí určit nejen cílové hodnoty, ale i to, které cíle jsou preferovanější, musí je ordinálně seradit. Obvykle platí, že nejpreferovanějšího cíle je dosaženo beze zbytku, dosažení méně preferovaných cílu je částečné, případně jich není dosaženo vůbec.

příklad 4.3 Využiji-li údaje z příkladu 4.2, může být úloha zadána takto: první prioritou firmy je, aby zisk dosáhl prinejmenším částky 5000 Kc. Dále je žádoucí, aby obou hraček bylo vyrobeno stejné množství. Zároveň by oba druhy plyše mely být využity v maximální možné míře (v poradí tmavě hnědý, světle hnědý).

Graficky lze úlohu opět vyřešit poměrně snadno, vede k řešení $E[240/11, 240/11]$, hodnota ziskové funkce je $f_1(240/11, 240/11) = 62400/11$. Aby se dala využít simplexová metoda, úloha se preformuluje:

$$\begin{aligned} & \max -d_1^- \\ & \max -(d_2^+ + d_2^-) \\ & \max -d_3^- \\ & \max -d_4^- \end{aligned}$$

za omezení

$$\begin{aligned} 120x_1 + 140x_2 - d_1^+ + d_1^- &= 5000 \\ x_1 - x_2 - d_2^+ + d_2^- &= 0 \\ 80x_1 + 30x_2 + d_3^- &= 2400 \\ 60x_1 + 40x_2 + d_4^- &= 2400, \end{aligned}$$

kde d_i^- , $i = 1, 2$, označuje o kolik je převýšena i -tá cílová hodnota, d_i^+ , $i=1..4$, obdobně označuje, kolik jednotek chybí, aby bylo dosaženo i -té cílové hodnoty. Všechny promenné musejí být nezáporné. Zároveň index i označuje prioritu uspokojení příslušné podmínky. Zadání využívá skutečnosti, že úloha minimalizovat nějakou funkci je ekvivalentní s úlohou maximalizovat tuto funkci vynásobenou číslem -1. Tak např. v první z podmínek je prioritou minimalizovat d_1^- , což je ekvivalentní s maximalizací $-d_1^-$. Nyní je možné přistoupit k vyplnění počáteční simplexové tabulky.

bázická prom.	x_1	x_2	d_1^+	d_2^+	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	hodn. báz.
d_1^-	120	140	-1	0	1	0	0	0	5000
d_2^-	1	-1	0	-1	0	1	0	0	0
d_3^-	80	30	0	0	0	0	1	0	2400
d_4^-	60	40	0	0	0	0	0	1	2400
	-120	-140	1	0	0	0	0	0	-5000

	-1	1	0	1	0	0	0	0	0
	-80	-30	0	0	0	0	0	0	-2400
	-60	-40	0	0	0	0	0	0	-2400

Tabulka 4.4: Simplexová tabulka pro lexikografické programování

Nejvýznamnější rozdíl proti standardní simplexové metodě spočívá v tom, že kriteriální řádky nejsou zvažovány najednou, ale po jednom, a to nejdříve řádek s nejvyšší prioritou. Nabyde-li první úcelová funkce maxima, tj. jsou-li všechny koeficienty u nebázických promenných nezáporné, je možné přejít k druhému řádku. Za bázickou promennou může být vybrána pouze taková promenná, která zlepší hodnotu druhé úcelové funkce a zároveň nezhorší hodnotu první úcelové funkce, tj. je-li ve druhém kriteriálním řádku u nějaké nebázické promenné záporný koeficient, nesmí být v prvním kriteriálním řádku nad tímto koeficientem koeficient kladný. Pokud taková nebázická promenná neexistuje, přejde se ihned k třetímu řádku. Tento postup se opakuje pro všechny kriteriální řádky.

Nebudu zde uvádět celý zdlouhavý postup výpočtu, nicméně lze se skutečně propočítat k řešení E[240/11, 240/11].

Na podobném principu pracuje i delivý algoritmus. Ten opět využívá toho, že jednotlivé úcelové funkce jsou ordinálně seřazeny podle priorit rozhodovatele. Celý problém je rozdělen do několika subproblémů. Obecně platí, že v každém subproblému jsou zvažována pouze omezení a promenné, které jsou relevantní až k příslušné úrovni priority. Řešení nejpreferovanějšího subproblému je považováno za počáteční řešení druhého nejpreferovanějšího subproblému. V reci simplexové metody to znamená, že v tomto řešení musí existovat v kriteriálním řádku alespoň jedna nebázická promenná s koeficientem 0, který naznačuje existenci alternativních řešení. Pokud takováto nebázická promenná neexistuje, je algoritmus u konce. Jinak se do úlohy dodají promenné a omezení druhého nejpreferovanějšího subproblému. Vypustí-li se nebázické promenné s kladným koeficientem v kriteriálním řádku, je původní kriteriální řádek celý nulový a dá se nahradit novým kriteriálním řádkem. Celý proces se opakuje, dokud není nalezeno řešení celé úlohy.

4.2.3 MULTIPARAMETRICKÉ PROGRAMOVÁNÍ

Simplexová metoda je využitelná i při multiparametrické dekompozici. Necht $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_l(\mathbf{x})$ jsou lineární úcelové funkce, které mají být bez újmy na obecnosti maximalizovány. Tyto funkce se dají zagregovat do jedné funkce

$$f(\lambda, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i(\mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{l} = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\lambda_i \geq 0$, $i=1 \dots l$, $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$ je vektor vah (parametru), přiřazených jednotlivým úcelovým funkcím. Úloha maximalizovat funkci $f(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ za daných (predpokládejme opět, že lineárních) omezení by znamenala hledat nedominovaná řešení pro všechny přípustné vektory \mathbf{l} . Ukazuje se, že tuto úlohu lze řešit snadněji. Užitím údaje ze simplexové tabulky pro hledání nedominovaných řešení původní úlohy (tj. úlohy maximalizace l úcelových funkcí) se dá množina všech přípustných vektorů \mathbf{l} dekomponovat na podmnožiny spojené s individuálními nedominovanými řešeními.

příklad 4.4 Jednoduchý příklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 5x_2 \quad (= f_1(x_1, x_2)) \\ \max \quad & 10x_1 + 2x_2 \quad (= f_2(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 &\leq 160 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Agregovaná funkce je

$$f(\mathbf{l}, \mathbf{x}) = \lambda_1(4x_1 + 5x_2) + \lambda_2(10x_1 + 2x_2) = x_1(4\lambda_1 + 10\lambda_2) + x_2(5\lambda_1 + 2\lambda_2).$$

Úloha má dve nedominovaná řešení: A[20, 0] a B[0, 80]. Odpovídající simplexové tabulky jsou:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	1/4	1/8	0	20
x_4	0	1/4	-3/8	1	40
	0	-4	1/2	0	80
	0	1/2	5/4	0	200

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	4	1	1/2	0	80
x_4	-1	0	-1/2	1	20
	16	0	5/2	0	400
	-2	0	2	0	160

Tabulka 4.5: Simplexové tabulky pro nedominovaná řešení A a B

Bod A bude nedominovaným řešením úlohy maximalizovat funkci $f(\mathbf{l}, \mathbf{x})$, pokud pro λ_1, λ_2 bude platit

$$\begin{aligned} -4\lambda_1 + 1/2\lambda_2 &\geq 0 \\ 1/2\lambda_1 + 5/4\lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Obdobne pro nedominovaný bod B

$$\begin{aligned} 16\lambda_1 + 5/2\lambda_2 &\geq 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Tyto podmínky rozdělí úsečku $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ na dvě části se společným hranicním bodem C[1/9, 8/9]. Je tedy pro jakýkoli vektor \mathbf{l} , pro jehož složky platí $\lambda_1 \geq 1/9, \lambda_2 \leq 8/9$ řešením úlohy maximalizovat $f(\mathbf{l}, \mathbf{x})$ bod A. V hranicním bode má úloha dve řešení.

Princip multiparametrické dekompozice se užívá v interaktivních metodách (7.kapitola).

4.2.4 ELIPSOIDICKÝ ALGORITMUS

Na záver bych slovne zmínila přístup, který je alternativou simplexové metody v úlohách lineárního programování. Velkou výhodou elipsoidického algoritmu je především skutečnost, že k řešení konverguje rychleji než simplexová metoda. V původní podobě byla metoda popsána pro omezení s více než dvěma lineárními nerovnostmi a s více než dvěma proměnnými a měla určit, zda množina dostupných

řešení X je neprázdná (nepracovalo se s žádnými úcelovými funkcemi). Logika metody je následující: nejdříve se vytvoří sféra, která obsahuje celou množinu X a pak se generuje posloupnost elipsoidů se stále menšími objemy, které stále těsněji obklopují množinu X , dokud střed elipsoidu nepadne do množiny X .

Zavedením více úcelových funkcí se musí metoda modifikovat, napr. tím způsobem, že se po nalezení prvního přípustného řešení identifikuje oblast, ve které se hodnoty všech úcelových funkcí zlepšují (pokud taková oblast existuje) a užitím principu elipsoidického algoritmu se hledá nové řešení.

5.KAPITOLA - ROZHODOVÁNÍ ZA NEJISTOTY

Až doposud jsem se zabývala rozhodováním a optimalizací za jistoty. Zvolí-li napr. rozhodovatel určitou kombinaci vstupu, mohl s jistotou předpovědět, k jaké úrovni zisku tato kombinace povede. V reálném světě tato jistota mizí - v lepším případě jsou možné následky rozhodovatelovy volby popsitelné pravděpodobnostně a mluví se o rozhodování za rizika, příp. za nejistoty. Rozdíl mezi rizikem a nejistotou je technického rázu: spočívá v tom, kolik informací o pravděpodobnostním rozložení hodnot relevantních charakteristik má rozhodovatel k dispozici. Za rizika je toto rozložení zcela kvantifikovatelné, za nejistoty jsou o něm známy jen neúplné údaje (napr. jenom střední hodnoty). Rozhodování za jistoty je tak vlastně krajním případem rozhodování za nejistoty: následek nastává s pravděpodobností jedna.

5.1 TEORIE STAVU SVĚTA

Obecnou teorií rozhodování za nejistoty je teorie preferencí podmíněných stavů světa. Teorie spočívá na dvou základních předpokladech:

1. Předpokládá se, že se rozhodovatel rozhoduje mezi vyhlídkami (ze nejistoty se dává přednost termínu "vyhlídka" před termínem "varianta") na základě relativně nízkého počtu charakteristik, přičemž každá z těchto charakteristik nabývá s jistou pravděpodobností nějaké hodnoty a těchto hodnot je opět relativně nízký počet (tj. hodnota charakteristiky je diskrétní náhodná veličina). Budoucnost se pak dá popsat možnými stavy světa S_1, \dots, S_r a jim odpovídajícími pravděpodobnostmi π_1, \dots, π_r . Stav světa je tedy m-rozměrný vektor, udávající jednu možnou kombinaci hodnot všech charakteristik. Množina všech stavů světa je vlastně množina všech možných kombinací hodnot jednotlivých charakteristik.
2. Předpokládá se, že jsou jednotlivé stavy světa spojeny s výplatami a že právě podle těchto výplat se rozhodovatel rozhoduje.

5.2 POSTOJ ROZHODOVATELE K RIZIKU

Ve druhé kapitole jsem v souvislosti s užitkovými funkcemi uvedla příklad metody loterie. Touto metodou zkonstruovaná užitková funkce vypovídá o rozhodovatelove postoji k riziku.

příklad 5.1 Odpoví-li rozhodovatel na otázku z příkladu 3.1, že $p = 1/2$, je $u(40) = 1/2$. Tento užitek přitom odpovídá očekávané mzdě $(1 - 1/2)35 + (1/2)70 = 52,50$ Kc. Užitek loterie s očekávanou mzdou 40 Kc odpovídá $p = 1/7$. Užitek z očekávané mzdy 40 Kc je nižší než užitek z jisté mzdy 40 Kc, rozhodovatel má k riziku averzi.

Celkem tak lze rozlišit tři typy rozhodovatelů:

1. S averzí k riziku. Příslušná užitková funkce je konkávní.
2. Se sklonem k riziku. Příslušná užitková funkce je konvexní.
3. S neutrálním postojem k riziku. Příslušná užitková funkce je lineární.

5.3 MERENÍ RIZIKA

Práce s radou stavů světa není příliš praktická, proto se informace v ní ukryté obvykle nějak kondenzuje. Protože se pracuje s pravděpodobnostními rozloženími, je možné volit ukazatele, které tato rozdělení popisují. Nejčastěji bývají temito ukazateli střední hodnota a rozptyl, příp. smerodatná odchylka. Právě rozptyl vystupuje často jako míra rizika.

příklad 5.2 - tradiční přístup V ekonomii se s teorií rozhodování za nejistoty pracuje nejvíce v teorii portfolia a vůbec v teoriích, které se nějakým způsobem dotýkají kapitálových trhů. Necht rozhodovatel uvažuje o koupi akcie. Rozhoduje se mezi akcemi dvou firem A a B, přičemž ho zajímá jediná charakteristika: výnosová míra r na konci nějakého období σ . Situace na konci tohoto období je charakterizovatelná pěti možnými stavy světa a jim odpovídajícími pravděpodobnostmi:

stav světa	pravděpodobnost	r_A	r_B
1	0,2	26	-4
2	0,2	12	23
3	0,2	-15	7
4	0,2	17	3
5	0,2	5	11

Tabulka 5.1: Výnosové míry dvou akcií za různých stavů světa (v procentech)
 Střední hodnota výnosové míry akcie A je

$$E(A) = 0,2 \sum_{l=1}^5 r_{Al} = 9 \%,$$

obdobně $E(B) = 8 \%$. Tato hodnota se dá interpretovat jako průměrná očekávaná výnosová míra akcie A, resp. B.

Rozptyl hodnot výnosové míry akcie A je

$$\text{var}(A) = 0,2 \sum_{l=1}^5 (r_{Al} - 9)^2 = 190,8 [\%^2],$$

obdobně $\text{var}(B) = 80,8 [\%^2]$. Akcie A tedy slibuje nepatrně vyšší výnos, je však spojena s vyšším rizikem, protože rozptyl hodnot výnosové míry je u této akcie vyšší. Obvykle platí, že akcie s vyšší očekávanou výnosovou mírou je spojena s vyšším rizikem. Ideální vyhlídka, která maximalizuje výnosovou míru a minimalizuje riziko, je zpravidla nedosažitelná. Konkrétní volba rozhodovatele bude záležet na jeho vztahu k riziku. Např. rozhodovatel s neutrálním postojem k riziku by se rozhodoval pouze na základě střední hodnoty výnosové míry akcie a volil by akcii A.

V případě, že si rozhodovatel porídí portfolio složené z obou akcií (pro jednoduchost budu předpokládat, že cena obou akcií je při koupi stejná a váha každé z akcií v portfolio je tak 1/2), pak očekávaná výnosová míra takového portfolio P je

$$E(P) = 1/2 E(A) + 1/2 E(B) = 7 \%.$$

Riziko spjaté s držbou tohoto portfolio se dá vypočítat pomocí individuálních rozptylu a kovariance

$$\text{cov}(A,B) = 0,2 \sum_{l=1}^5 (r_{Al} - 9)(r_{Bl} - 8) = -37,4 [\%^2],$$

$$\text{var}(P) = 1/4 \text{var}(A) + 1/4 \text{var}(B) + 1/2 \text{cov}(A,B) = 49,2 [\%^2].$$

Je videt, že vytvořením portfolia se podarilo výrazně snížit riziko. Rizikovost obou vyhlídek dohromady je tak popsitelná jediným číselným údajem (lze rozšířit na n vyhlídek).

Kromě rozptylu se dají použít i další jednodimenzionální míry rizika, v pojmech výše uvedeného příkladu je to napr.

1. Semivariance, která měří rozptyl hodnot charakteristiky pod nějakou předem určenou cílovou hodnotou.

2. Pravděpodobnost, že nebude dosaženo minimální možné výnosové míry.

Další skupina jednorozměrných měř rizika se snaží zkombinovat informace obsažené nejenom v rozptylu, ale též ve střední hodnotě, napr.:

1. $R(A) = \alpha \text{var}(A) - (1 - \alpha)E(A)$, kde $R(A)$ označuje riziko spjaté s držbou akcie A, α je konstanta z intervalu (0,1).

2. $R(A) = \text{var}(A)/E(A)$, za předpokladu $E(A) \neq 0$,

3. $R(A) = k (\text{var}(A))^{1/2} - E(A)$, kde $k > 0$ je konstanta.

Ukazuje se, že měření rizika pouze jedním číslem je nedostatečné. Napr. více než na rozptylu může rizikovost záležet na umístění distribuční funkce charakteristiky, tj. může být méně riziková akcie s vyšší očekávanou výnosovou mírou i s větším rozptylem. Proto se přechází k vícedimenzionálnímu měření rizika.

5.4 VÍCEDIMENZIONÁLNÍ MĚŘENÍ RIZIKA

Při vícerozměrném měření rizika je rizikovost každé vyhlídky ohodnocena nekolikasložkovým vektorem. Jedním z přístupů je hodnocení pomocí vektoru řazení vyhlídek (prospect ranking vector). Udávají-li složky vektoru $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{ir})$ hodnoty zkoumané (z hlediska rizika) charakteristiky v i-té vyhlídce za různých stavů světa, je rizikovost charakteristiky popsitelná tříslžkovým vektorem

$$\mathbf{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}).$$

1.složka vektoru odpovídá postoji rozhodovatele s averzí k riziku. Ten z vyhlídek vybere tu, která minimalizuje pravděpodobnost, že hodnota charakteristiky bude menší než nějaká prahová hodnota. Touto prahovou hodnotou může být bud

maximum z minimálních dosažitelných hodnot charakteristiky v jednotlivých vyhlídkách nebo individuální minimální přijatelná hodnota charakteristiky v_{\min} . Je tedy

$$a_i = \min_l v_{il}, l=1..r$$

$$A = \max_i a_i, i=1..n,$$

$$w'_{i1} = P(v_{il} < \max \{ A, v_{\min} \}).$$

2.složka vektoru odpovídá postoji rozhodovatele s neutrálním postojem k riziku. Ten se rozhoduje na základe očekávané střední hodnoty charakteristiky

$$w_{i2} = E(v_i).$$

3.složka vektoru odpovídá postoji rozhodovatele se sklonem k riziku. Ten z vyhlídek vybere tu, která minimalizuje pravděpodobnost, že hodnota charakteristiky nedosáhne nejlepší možné hodnoty.

$$b_i = \max_l v_{il}, l = 1..r,$$

$$B = \max_i b_i, i=1..n,$$

$$w'_{i3} = P(v_{il} < B).$$

Položí-li se $w_{i1} = 1 - w'_{i1}$ a $w_{i3} = 1 - w'_{i3}$, pak pro všechny složky vektoru platí, že mají být maximalizovány.

příklad 5.3 Pri použití údajů z příkladu 6.2 lze z hlediska rizika akcii A ohodnotit: $a_1 = -15$, $a_2 = -4$, $A = -4$, $b_1 = 26$, $b_2 = 23$, $B = 26$. Zadá-li $r_{\min} = 5$, je vektor razení vyhlídek $w_A = (0,8; 9; 0,2)$. Obdobně pro akcii B lze dojít k vektoru $w_B = (0,6; 8; 0)$. Je videt, že všechny složky vektoru razení vyhlídek pro akcii A jsou větší než všechny složky tohoto vektoru pro akcii B. Merí-li se riziko vícedimenzionálně, je akcie A jasne lepší než akcie B.

Ohodnocením rizika tříložkovým vektorem w_i je rozhodovací úloha prevedena na úlohu komplexního vyhodnocování variant (3.kapitola). Je možné definovat ideální vyhlídku, ve které jsou všechny tři složky vektoru razení vyhlídek maximalizovány. Ve výše uvedeném příklade by tato ideální vyhlídka splynula s vyhlídkou akcie A. V

případe, že je srovnávaných vyhlídek obecně n , je možné vzít za kritérium optimálnosti každé z nich napr. opet její vzdálenost od ideální vyhlídky (3.6.2).

6.KAPITOLA - ROZHODOVÁNÍ ZA NEURCITOSTI

V předcházející kapitole jsem se zabývala rozhodováním za rizika a nejistoty. Základním aparát pro uchopení takových úloh je aparát teorie pravděpodobnosti. V praxi existuje další typ rozhodovacích úloh - rozhodování za neurčitosti. Za neurčitosti se pracuje s neurčitými, vágními pojmy a situacemi, k jejichž modelování nejsou pravděpodobnostní metody vhodné. Proto byl vytvořen a rozpracován zvláštní nový aparát, teorie mlhavých množin.

6.1 MLHAVÉ MNOŽINY

Mezi prvkem a nemlhavou množinou může existovat jeden z následujících vztahu: buď prvek patří do množiny anebo do ní nepatří. V teorii mlhavých množin představují oba tyto vztahy extrémy. Teorie zavádí pojem stupeň příslušnosti prvku k množině a nemlhavě chápanou množinu tak rozostčuje, rozmlžuje. Mlhavá množina A se definuje na základe zobrazení

$$\mu_A(x) : U \rightarrow L,$$

kde U je nemlhavá množina, která obsahuje všechny potenciální prvky mlhavé množiny A a L je obvykle interval $\langle 0,1 \rangle$. Toto zobrazení se nazývá funkce příslušnosti. Funkce příslušnosti udává, do jaké míry o prvku platí výrok, že "je prvkem množiny A". Podobně jako u nemlhavých množin je možné u mlhavých množin definovat množinové operace (sjednocení, průnik atd).

Pro rozhodování za neurčitosti mají význam zejména dva typy mlhavých množin: mlhavá čísla a mlhavé binární relace. Mlhavé číslo α se dá charakterizovat funkcí příslušnosti

$$\mu_\alpha(x) : R \rightarrow L,$$

kde R je množina všech reálných čísel a L opět interval $\langle 0,1 \rangle$. Je možné definovat napr. aritmetické operace s mlhavými čísly, přičemž tyto operace si uchovávají některé vlastnosti platné pro operace s nemlhavými čísly (napr. komutativnost sčítání a násobení). Mlhavá čísla se uplatňují napr. při neurčitém hodnocení vztahu mezi charakteristikami. Mlhavá binární relace S na nemlhavé množině X je definována funkcí příslušnosti

$$\mu_S(x_1, x_2) : X \times X \rightarrow L.$$

Funkce příslušnosti $\mu_S(x_1, x_2)$ udává, do jaké míry platí mezi prvky $x_1, x_2 \in X$ relace S . Mlhavé relace se využívají při neurcité formulovaných preferencích na množině variant. Funkce příslušnosti může napr. vyjadřovat, do jaké míry platí, že je varianta x_1 preferována před variantou x_2 . Mlhavým relacím je venována subkapitola 6.3.4.

6.2 PSEUDOKRITÉRIA

Neurčitost se může projevit i v rozlišovacích schopnostech jednotlivých charakteristik. Ne vždy je rozhodovatel schopen přesně určit, zda je varianta x_1 podle j -té charakteristiky lepší než varianta x_2 . Mluví se proto o pseudokritériích. Relace mezi variantami $x_1, x_2 \in X$ se určuje na základě dvou prahu: prahu indiference q_j a prahu preference $s_j, s_j > q_j$. Platí:

$$1. x_1 I x_2 \Leftrightarrow -q_j(u_j(x_1)) \leq u_j(x_1) - u_j(x_2) \leq q_j(u_j(x_2)),$$

$$2. x_1 P x_2 \Leftrightarrow u_j(x_1) - u_j(x_2) > s_j(u_j(x_2)),$$

$$3. x_1 Q x_2 \Leftrightarrow q_j(u_j(x_2)) < u_j(x_1) - u_j(x_2) \leq s_j(u_j(x_2)),$$

kde relace Q je označována jako slabá preference, u_j je nějaká kardinální funkce příslušející j -té charakteristice. Indiference mezi variantami tak nastává, ačkoliv existuje určitý malý rozdíl v hodnocení obou variant, tento rozdíl není ale rozhodovatelem považován za podstatný.

6.3 VYHODNOCOVÁNÍ VARIANT ZA NEURCITOSTI

6.3.1 VÁHY ZA NEURCITOSTI

Většina metod odhadu vah prirazených jednotlivým charakteristikám (3.6.1) vychází z párového ohodnocení důležitosti charakteristik. V souvislosti s tímto se lze v praxi setkat se dvěma typy neurčitosti:

1. Nekonzistence v párovém ohodnocení. Napr. v Saatyho metode by mely prvky matice \mathbf{B} splňovat vztah $b_{ij}b_{jk} = b_{ik}$, $i, j, k = 1 \dots m$. Obvykle to však neplatí, rozhodovatel projevuje ve svém hodnocení určitou nekonzistenci (za měřítko nekonzistence lze považovat napr. největší vlastní číslo příslušející matici \mathbf{B} . Čím větší je toto vlastní číslo než m , tím více je hodnocení nekonzistentní). Je možné

použít metody, které dokáží puvodní matici převést na matici konzistentní, napr. Narasimhanuv postup. Taková úprava může ale obecně vést k jinému výsledku než výpočet s puvodní maticí.

2. Neúplná párová ohodnocení. Neúplnost může znamenat, že některá párová ohodnocení úplně chybějí nebo jich je naopak k dispozici větší počet. Oba případy je nutné zohlednit při výpočtu váhového vektoru. Při neúplnosti párových ohodnocení se dá využít upravené metody LINMAP, upravené Saatyho metody apod.

6.3.2 JEDNODUCHÁ AGREGACE CHARAKTERISTIK ZA NEURČITOSTI

V praxi se stává, že varianty nejsou z hlediska nějaké charakteristiky porovnatelné. Důvodem může být napr., že údaj o kvalitě či kvantitě charakteristiky chybí. Agregace takových charakteristik musí tuto skutečnost zohlednit. Možné způsoby jsou napr. následující:

1. Metoda váženého součtu poradí. Variante $\mathbf{x}_i \in X$ je přiřazeno

$$r_i = \frac{\sum_{j \in P_i} p_j (k_j - 1) r_{ij}}{\sum_{j \in P_i} p_j (k_j - 1)},$$

kde P_i je množina indexů všech charakteristik, které jsou pro variantu \mathbf{x}_i definovány, k_j je počet variant, pro které je definována j -tá charakteristika, r_{ij} označuje poradí i -té varianty v hodnocení dle j -té charakteristiky.

2. Metoda vážené euklidovské vzdálenosti od ideální varianty. Variante $\mathbf{x}_i \in X$ je přiřazena vzdálenost od ideální varianty \mathbf{x}^*

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) = \left(\frac{\sum_{j \in P_i} p_j (x_{ij} - x_j^*)^2}{\sum_{j \in P_i} p_j} \right)^{1/2}.$$

Užití obou uvedených metod je uvedeno v 8. kapitole.

6.3.3 VERBÁLNÍ VÝRAZY

Chce-li rozhodovatel použít bodovací metodu agregace charakteristik a o bodovém ohodnocení jednotlivých variant z hlediska jednotlivých charakteristik i o důležitosti samotných charakteristik má jen neurčitou představu, vyjádřenou verbálně, lze využít mlhavých čísel. Mlhavá čísla umožňují modelování verbálních výrazů.

příklad 6.1 Necht rozhodovatel hodnotí varianty dle tří charakteristik, jejichž důležitost je verbálně ohodnocena následovně (je to vlastně verbální určení vah): "velmi významná", "významná", "spíše nevýznamná". Ohodnocení varianty dle těchto charakteristik je po rade opět verbální: "velmi dobrá", "špatná", "dobrá". Rozhodovatel může na základě svého úsudku (je tu tedy značná subjektivita) prisoudit každému z verbálních ohodnocení mlhavé číslo, napr.

$$\text{velmi dobrá} = \{ 0,5/0,8; 0,8/0,9; 1,0/1,0 \}.$$

Zápis znamená, že nabyde-li charakteristika ve variantě napr. hodnoty 0,9, pak funkce příslušnosti nabývá hodnoty 0,8. Jinými slovy výrok "varianta je z hlediska první charakteristiky velmi dobrá" platí na 80%. Obdobně lze vytvořit mlhavá čísla i pro ohodnocení zbývajících dvou charakteristik varianty a i pro samotnou důležitost jednotlivých charakteristik. Po příslušných výpočetních operacích s mlhavými čísly se dá každé variantě přiřadit agregující, opět mlhavé číslo. Dále je nutné aplikovat metody, které "umejí" z takto ohodnocených variant vybrat variantu neoptimálnější, napr. metodu, která využívá sestrojení maximalizující množiny.

6.3.4 MLHAVÉ RELACE

Má-li rozhodovatel porovnat varianty $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ podle j -té charakteristiky, může se stát, že tyto varianty porovnat neumí, nemůže, případně vůbec nechce. K modelování preferenčních relací za takových situací (ať už dílčích nebo agregovaných) slouží mlhavé preferenční relace. Funkce příslušnosti $\mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ udává, nakolik je platný výrok "varianta \mathbf{x}_1 je podle j -té charakteristiky preferována před variantou \mathbf{x}_2 ". Tuto funkci příslušnosti lze definovat pomocí prahu preference s_j (6.2):

$$1. \mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 \Leftrightarrow \text{platí "varianta } \mathbf{x}_1 \text{ je preferována před variantou } \mathbf{x}_2 \text{" neboli } u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) < 0,$$

2. $\mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \Leftrightarrow$ platí "varianta \mathbf{x}_2 je preferována před variantou \mathbf{x}_1 " nebo "varianta \mathbf{x}_1 je dispreferována před variantou \mathbf{x}_2 " neboli $u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) > s_j$,
3. $\mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (0, 1) \Leftrightarrow 0 \leq u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) \leq s_j$. $\mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se musí nějakým způsobem určit, napr. lineárně vztahem

$$\mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 - \frac{u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1)}{s_j}.$$

Obdobně lze definovat funkci příslušnosti v případě, že je j -tá charakteristika pseudokritérium (6.2).

Může se stát, že pro j -tou charakteristiku je rozdíl $u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) - s_j > 0$ výrazný, je proto žádoucí, aby podle výsledné relace nemohlo nastat, že \mathbf{x}_1 bude preferováno před \mathbf{x}_2 . Zavádí se proto práh dispreference v_j . Výrazný rozdíl pak znamená, že $u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) - s_j > v_j$.

Dvojici variant \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 je možné dále prisoudit míru platnosti výroku " \mathbf{x}_2 je dispreferováno před \mathbf{x}_1 " na základě funkce příslušnosti $d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$:

1. $d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 \Leftrightarrow u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) > s_j + v_j$,
2. $d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \Leftrightarrow u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) < s_j$,
3. $d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (0, 1) \Leftrightarrow s_j \leq u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1) \leq s_j + v_j$. $d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se musí opět nějak určit, napr. opět lineárně

$$d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 1 - \frac{u_j(\mathbf{x}_2) - u_j(\mathbf{x}_1)}{s_j + v_j}.$$

Na základě funkcí příslušnosti $\mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $j=1 \dots m$, se dá definovat index souhlasnosti c_{12} , $c_{12} = \sum_{j=1}^m p_j \mu_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. K sestrojení indexu je nutné znát váhy přiřazené jednotlivým charakteristikám. Funkce příslušnosti agregátní mlhavé relace se sestrojí na základě vztahu platného mezi hodnotou indexu c_{12} a hodnotami funkcí příslušnosti $d_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $j=1 \dots m$. Pro výber optimální varianty je třeba užít metod, které "umějí" vybrat nejlepší variantu při zadaných agregátních mlhavých relacích mezi dvojicemi variant $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in X$, $i, j=1 \dots m$.

Mlhavé relace stojí v pozadí metod agregace charakteristik založených na prázích citlivosti (6.3.5).

6.3.5 METODY AGREGACE ZALOŽENÉ NA PRAZÍCH CITLIVOSTI

Základ těchto metod je společný. Dvojice variant jsou srovnávány z hlediska všech charakteristik a tato dílčí vyhodnocení jsou nějakým způsobem agregována (obe níže uvedené metody vyžadují k agregaci znalost vah přiřazených jednotlivým charakteristikám). Rozhodovatel tím, že klade požadavky na hodnoty těchto agregátů, rozkládá množinu všech variant na třídy. Volba prahu citlivosti má přitom zásadní dopad na tento rozklad.

1. Metoda AGREPREF. Pro každou dvojici variant $x_i, x_j \in X$ jsou z množiny všech charakteristik vyloučeny tři disjunktní podmnožiny:

1. Podmnožina všech takových charakteristik, pro které platí $x_i P_k x_j$. Součet vah těchto charakteristik se označí s_{ij} .
2. Podmnožina všech takových charakteristik, pro které platí $x_j P_k x_i$. Součet vah těchto charakteristik se označí s_{ji} .
3. Podmnožina všech takových charakteristik, pro které platí $x_j I_k x_i$. Součet vah těchto charakteristik se označí s_{i-j} .

Metoda využívá všech tří výše zavedených prahu, které musejí být zadány rozhodovatelem: prahu indiference, prahu preference a prahu dispreference. Práh indiference udává, jak velký by měl minimálně být součet vah těchto charakteristik, pro které je varianta x_i indiferentní s variantou x_j . Tento práh je srovnáván s s_{i-j} . Práh preference je srovnáván s rozdílem $s_{ij} - s_{ji}$. Po zadání těchto prahu se dá množina všech variant rozložit na třídy. Hodnoty prahu mohou být přitom rozhodovatelem měněny, dokud není rozklad považován za vyhovující.

2. Metoda ELECTRA I. Metoda je určena k vyloučení těch variant, které jsou zřejmě neoptimální (jde o rozklad množiny variant X do dvou tříd). Metoda pracuje pouze se dvěma prahy: prahem preference a prahem dispreference. Relace preference je zde uvažována v neostrém smyslu a rozklad množiny všech charakteristik je proveden pouze do dvou podmnožin. Každá z těchto podmnožin je charakterizována svým indexem: index souhlasnosti c_{ij} charakterizuje podmnožinu charakteristik R_k , podle kterých je $x_i R_k x_j$ (v případě, že platí $\sum_{k=1}^m p_k = 1$, je c_{ij} roven součtu vah těchto charakteristik). Z indexu c_{ij} lze vytvořit matici $C_{n \times n}$. Index nesouhlasnosti d_{ij} je definován přímo v

závislosti na hodnotách charakteristik (v případě, že jsou charakteristiky kvantitativní, metoda je modifikovatelná i pro kvalitativní charakteristiky), pro které platí $x_j P_k x_i$. Z indexu d_j lze vytvořit matici **D**. Nevýhodné jsou ty varianty, které mají index souhlasnosti blízký nule a index nesouhlasnosti blízký jednicce. Zadá-li rozhodovatel práh preference c a práh dispreference d , mohou být vyloučeny ty varianty $x_i \in X$, pro které platí $c_{ij} < c$ a $d_{ij} > d$, $j=1\dots n$, $i \neq j$.

6.4 LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ ZA NEURČITOSTI

Lineární programování za neurčitosti zmíním v souvislosti s cílovým programováním (4.2.2). Rozhodovatel může mít o cílových hodnotách úcelových funkcí apod. pouze neurčitě představy, projevené napr. verbálně výrazy typu "asi", "zhruba".

příklad 6.2 V pojmech příkladu 4.2 mohou být takovými mlhavými cíli napr.: zisk firmy má být asi 4800 Kc, plyšových opic má být vyrobeno přibližně 20, medvedu přibližně 15 (cíle jsou zvažovány simultánně). Formálně zapsáno:

$$\begin{aligned} 120 x_1 + 140 x_2 &\approx 4800 \quad (= f_1(x_1, x_2)) \\ x_1 &\approx 20 \quad (= f_2(x_1)) \\ x_2 &\approx 15 \quad (= f_3(x_2)) \end{aligned}$$

za příslušných omezení. Symbol \approx je fuzzifikátor.

Mlhavá cílová hodnota se dá opět nahradit mlhavým číslem, přičemž je nutné nějakým způsobem určit funkci příslušnosti. Jednou z možností je zadat pro každý z mlhavých cílů přípustné odchylky, necht napr. zisk se může odchýlit od mlhavé hodnoty 4800 Kc o ± 300 Kc. Funkci příslušnosti lze pak definovat lineárně

$$\begin{aligned} 1. \mu_1(x_1, x_2) &= 1 - |f_1 - 4800| / 300 = 1 - |120 x_1 + 140 x_2 - 4800| / 300 \\ &4500 \leq f_1 \leq 5100, \\ 2. \mu_1(x_1, x_2) &= 0 \text{ jinak.} \end{aligned}$$

Obdobně lze po zvolení odchylek, napr. ± 5 kusu, vyjádřit i funkce příslušnosti μ_2 a μ_3 . Ukazuje se, že úloha $\max(\min(\mu_1, \mu_2, \mu_3))$ je převoditelná na úlohu lineárního programování

$$\begin{aligned} &\max \lambda \\ &\text{za omezení} \\ &120 x_1 + 140 x_2 + 300 \lambda \geq 4500 \end{aligned}$$

$$120x_1 + 140x_2 - 300\lambda \leq 5100$$

$$x_1 + 5\lambda \geq 15$$

$$x_1 - 5\lambda \leq 25$$

$$x_2 + 5\lambda \geq 10$$

$$x_2 - 5\lambda \leq 20,$$

za puvodních omezeních a při nezápornosti všech promenných. Úloha je řešitelná simplexovou metodou (4.2.1). Úloha se dá opět modifikovat pro případ, že jednotlivé cíle mají odlišnou důležitost (4.2.2).

7.KAPITOLA - INTERAKTIVNÍ METODY

Angličtina používá pro interaktivní metody velice výstižný název, který v překladu zní "metody progresivní artikulace preferencí". Stojí za nimi předpoklad, že preference rozhodovatele nejsou na začátku řešení rozhodovacího problému dané a zcela vyjasněné, ale že závisejí na konkrétním rozhodovacím problému a že je třeba během rozhodovacího procesu zachytit jejich formování a vývoj .

Interaktivní metody se používají zejména ve spojení s výpočetní technikou, jde o dialog mezi rozhodovatelem a počítačem. V dialogu se zpravidla opakují dvě fáze:

- 1.Rešitel (počítac) vypocítá řešení a nabídne ho rozhodovateli k posouzení (je to provizorní řešení).
- 2.Rozhodovatel posoudí, zda je nabídnuté provizorní řešení vyhovující nebo nevyhovující. Je-li řešení nevyhovující, rozhodovatel dále vyspecifikuje svoje preference a předá je řešiteli. Zpusob vyspecifikování těchto preferencí se pritom v jednotlivých metodách liší.

Tyto dvě fáze se opakují, dokud předložené provizorní řešení není vyhovující.

7.1 INTERAKTIVNÍ METODY V ÚLOHÁCH KOMPLEXNÍHO VYHODNOCOVÁNÍ VARIANT

7.1.1 INTERAKTIVNÍ URČOVÁNÍ VAH

V subkapitole 3.6.1 jsem se venovala způsobem odhadu vah prirazeným jednotlivým charakteristikám. Veššina z těchto metod se dá interaktivne upravit: existuje tak napr. interaktivní Saatyho metoda, interaktivní metoda nejmenších ctvercu, interaktivní metoda LINMAP apod. Interaktivita pritom opet slouží k tomu, aby rozhodovatel mohl presne vyspecifikovat svoje preference, tj. aby s nimi uvedl v soulad získané odhady vah.

Zinteraktivnení uvedu na příklade Saatyho metody: rozhodovateli je předložen vypocítaný vektor vah \mathbf{p} , rozhodovatelem zadaná matice \mathbf{B} a matice \mathbf{B}' , jejíž prvek b_{ij}' se získá z vypocítaného vektoru \mathbf{p} jako pomer jeho složek p_i / p_j Na základe porovnání

odchylek mezi b_{ij} a b_{ij}' může rozhodovatel upravit matici \mathbf{B} a získat nový upravený odhad vah.

7.2 INTERAKTIVNÍ METODY V ÚLOHÁCH VEKTOROVÉ OPTIMALIZACE

Způsoby vyjadrování preferencí jsem podrobněji probrala v subkapitole 2.1. Interakce v úlohách vektorové optimalizace využívají zejména:

1. Urcování měr substituce.
2. Urcování hodnot účelových funkcí.
3. Přímý výběr z množiny provizorních řešení.

7.2.1 METODY ZALOŽENÉ NA URČOVÁNÍ MĚR SUBSTITUCE

Jak bylo již též uvedeno v subkapitole 2.1, míra substituce je poměr, který vyjadruje, jaké množství prvního objektu je rozhodovatel ochoten obetovat, aby u druhého objektu dosáhl zvýšení o nějaké množství (je-li toto množství jednotkové, jde o mezní míru substituce).

1. Geoffrionova metoda. Metoda pracuje s několika předpoklady, zejména s předpokladem konvexnosti množiny dostupných řešení X a s předpokladem, že užitková funkce $u(\mathbf{x})$ je sice obecně neznámá, ale je konkávní. Necht \mathbf{x}_1 je nějaké výchozí řešení. Gradient užitkové funkce má složky:

$$v_i = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^l s_{j1} \frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

$i=1\dots m$, kde $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_l(\mathbf{x})$ jsou účelové funkce, které vystupují v úloze, a s_{j1} jsou váhy, které se dají interpretovat jako mezní míry substituce mezi j -tou účelovou funkcí a nějakou referenční funkcí, napr. $f_1(\mathbf{x})$, při řešení \mathbf{x}_1 . Právě tyto váhy se získají interaktivně, napr. otázkou: "O jaké množství ceteris paribus je rozhodovatel ochoten snížit hodnotu funkce $f_1(\mathbf{x}_1)$, aby dosáhl zvýšení hodnoty funkce $f_j(\mathbf{x}_1)$ o jednotku?". Z odpovědi se získá

$$s_{j1} = \frac{\Delta f_1}{\Delta f_j} = \frac{1}{\Delta f_j},$$

Je-li řešením úlohy

$$\max \sum_{i=1}^m v_i x_i$$

za omezení $\mathbf{x} \in X$

vektor \mathbf{x}_1' , je nejlepší smer pohybu z řešení \mathbf{x}_1 dán výrazem $(\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_1)$. O tom, jak daleko se v tomto smeru pohybovat, musí opet rozhodnout rozhodovatel. Na základe srovnání funkčních hodnot jednotlivých účelových funkcí musí udat hodnotu $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ tak, aby vektor \mathbf{x}_2 mohl být považován za nové řešení (jde o logiku gradientní metody s dlouhým krokem, příklad 4.1):

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \alpha (\mathbf{x}_1' - \mathbf{x}_1).$$

Algoritmus pokračuje, dokud existuje smer, v němž je pohyb rozhodovatelem posuzován jako žádoucí.

2. Metoda SWT (Surrogate Worth-Off Method, metoda náhradních hodnot). I v této metode je nutné zvolit nějakou referenční funkci, napr. opet $f_1(\mathbf{x})$. Nejdríve je generována množina nedominovaných řešení. Každému z těchto řešení odpovídají určité hodnoty všech účelových funkcí a mezní míry substituce mezi j-tou účelovou funkcí a referenční funkcí $f_1(\mathbf{x})$, $s_{j1} = 1/\Delta f_j$. Práve na základe těchto údajů je vytvářena funkce náhradních hodnot. Každé z mezních mer substituce přiřadí rozhodovatel ocenění z intervalu $\langle -K, K \rangle$, K je zvolená konstanta. Pritom platí: čím vyšší ocenění, tím výhodnější je pro rozhodovatele zmena míry substituce. Na základe těchto údajů se generuje nová množina nedominovaných řešení. Nejpreferovanejší situace nastane, je-li všem mírám substituce přiřazena hodnota funkce náhradních hodnot rovna nule.

3. Ziontsova-Walleniova metoda. Tato metoda vyžaduje opet konvexnost množiny přípustných řešení X , navíc pak při úloze maximalizovat účelové funkce je vyžadována konkávitá těchto funkcí (při řešení se tyto funkce linearizují). Užítková funkce je implicitně považována za lineární:

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{l}, \mathbf{x}) = \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_l f_l(\mathbf{x}).$$

Metodou se hledá takový vektor vah \mathbf{l} , aby byla užítková funkce byla maximalizována. Nejdríve se zvolí nějaký vektor vah \mathbf{l}_1 a maximalizací funkce $f(\mathbf{l}_1, \mathbf{x})$ za omezení $\mathbf{x} \in X$ se získá nedominované řešení. Existuje-li při tomto

váhovém vektoru další nedominované řešení, pak zavedení příslušné nebázické promenné x_j do báze povede k poklesu funkční hodnoty nejméne jedné z účelových funkcí. Označí-li se w_{ij} hodnota poklesu i -té účelové funkce při zavedení jednotkového množství j -té nebázické promenné do báze, je možné interaktivně zjistit, zda je rozhodovatel ochoten tyto hodnoty w_{ij} akceptovat. V případě, že je některá z těchto hodnot akceptovatelná, vypočítá se nový vektor vah a celý proces se opakuje. Toto se případně zopakuje i pro další nebázické promenné, které by vedly k dalším nedominovaným řešením. Algoritmus končí, jestliže rozhodovatel není ochoten akceptovat ani jednu z hodnot w_{ij} . Metoda využívá poznatku multiparametrického programování (4.2.3): množina všech přípustných vektorů I se dá rozložit na podmnožiny, přičemž všem vektorům z jedné podmnožiny odpovídá stejné nedominované řešení.

7.2.2 METODY ZALOŽENÉ NA URČOVÁNÍ HODNOT ÚČELOVÝCH FUNKCÍ

Urcení míry substituce může být pro rozhodovatele obtížné. K nejznámějším metodám z této skupiny patří:

1. Metoda STEM (Step Method, metoda kroku). Metoda nejdrívě hledá ideální variantu řešením l úloh

$$\begin{aligned} & \max f_i(\mathbf{x}), \quad i=1\dots l \\ & \text{za omezení } \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Ideální varianta je vyjádřena v hodnotách účelových funkcí

$$\mathbf{x}^* = (f_1(\mathbf{x}_1), \dots, f_l(\mathbf{x}_l)),$$

kde $\mathbf{x}_i, i=1\dots l$, je řešením i -té úlohy. Rozhodovateli je předloženo provizorní řešení \mathbf{x} , které minimalizuje maximální váženou odchylku mezi dosažitelnou a ideální hodnotou všech účelových funkcí

$$\min d$$

$$\text{za omezení } d \geq w_i (f_i(\mathbf{x}_i) - f_i(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{x} \in X,$$

kde $w_i, i=1\dots l$, je váha, $\sum_{i=1}^l w_i = 1$. Rozhodovatel musí určit, které účelové funkce dosáhly v tomto řešení uspokojivých a které neuspokojivých hodnot. Všem účelovým funkcím, jejichž hodnoty dosáhly uspokojivých hodnot, je do dalšího kroku algoritmu přirazena váha nula. Zároveň musí rozhodovatel zadat, jaké je přípustné zhoršení hodnot těchto účelových funkcí. Poté je predefinována množina přípustných řešení: přípustná jsou nadále taková \mathbf{x} , která nezhorší hodnoty funkcí, které již dosáhly uspokojivé hodnoty, o více než zadané přípustné zhoršení, a které zlepšují hodnoty zbylých účelových funkcí. Algoritmus se vrací zpátky na začátek.

2. Monarchiho technika (též metoda SIGMOP). Metoda zavádí interakce do principu cílového programování (4.2.2). Metoda rozlišuje mezi cílovými hodnotami a aspiračními úrovnemi jednotlivých účelových funkcí. Cílové hodnoty jsou chápány v tradičním smyslu, tj. jsou to externě určené hodnoty, kterých by měly jednotlivé účelové funkce nabýt. Aspirační úrovně jsou takové hodnoty účelových funkcí, které si rozhodovatel přeje v závislosti na situaci, na základě změn v preferencích, získáním dalších informací apod. Každé z účelových funkcí $f_i(\mathbf{x})$ je rozhodovatelem přirazena jedna cílová hodnota g a jedna aspirační úroveň a_i . Rozhodovatel musí také zadat výchozí vektor vah $\mathbf{w} = (w_1 \dots w_l)$. Úlohou je

$$\min \sum_{i=1}^l w_i d_i$$

$$\begin{aligned} &\text{za omezení } \mathbf{x} \in X, \\ &f_i(\mathbf{x}) + d_i \geq a_i, i=1\dots l, \\ &0 \leq d_i \leq a_i - g_i, \end{aligned}$$

odchylka d_i vyjadřuje vztah mezi i -tou účelovou funkcí, cílovou hodnotou g a aspirační úrovní a_i . Rozhodovateli jsou sděleny hodnoty účelových funkcí v řešení. Nejsou-li tyto hodnoty uspokojivé, může rozhodovatel zvýšit váhy u účelových funkcí, které nedosahují uspokojivých hodnot nebo změnit aspirační úroveň.

7.2.3 VÝBER Z MNOŽINY PROVIZORNÍCH REŠENÍ

Z této skupiny metod vybírám nejznámější metodu.

Steuerova metoda. Metoda byla původně určena pro úlohy interaktivní lineární optimalizace, princip se dá ale aplikovat obecně na konvexní úlohy. Metoda je založena na maximalizaci agregátní funkce

$$f(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_l f_l(\mathbf{x})$$

za omezení $\mathbf{x} \in X$.

Jak bylo ukázáno v subkapitole o multiparametrické dekompozici (4.2.3), vede tato úloha pro různé vektory λ k nedominovaným řešením shodným s nedominovanými řešeními dílčích úloh (tj. úloh $\max f_i(\mathbf{x})$, $i=1\dots l$). Zadá-li rozhodovatel pro každou složku λ_i vektoru λ horní a dolní hranici U_i a L_i , které hodnota λ_i nesmí překročit, je množství nedominovaných řešení menší. Vybere-li z něj rozhodovatel nejpreferovanější nedominované řešení, algoritmus spočítá nové hranice U_i a L_i , pro které lze dojít k tomuto nejpreferovanějšímu nedominovanému řešení, ale přes menší podprostor tvořený kombinacemi složek λ_i . Tento podprostor je dále zmenšován tak, aby obsahoval nejpreferovanější volby. Výsledkem je malá množina nedominovaných řešení, ze které si rozhodovatel vybere nejpreferovanější řešení.

8.KAPITOLA - VÝBER SPACÍHO PYTLE

V této kapitole je řešena úloha usporádání množiny spacích pytlů při použití různých metod určení vah jednotlivých charakteristik a agregace charakteristik (jde o úlohu komplexního vyhodnocování variant). Údaje pocházejí z deníku MF Dnes ze dne 31.1.1996 a jsou uvedeny v tabulce v závěru této kapitoly. Zvažovány jsou přitom údaje ze spodní části tabulky, které byly získány měřeními ve zkušebně a o kterých proto předpokládám, že jsou (narozdíl od údajů uvádaných výrobcem) vzájemně srovnatelné.

Snadno se dá nahlédnout, že množina dostupných variant je desetiprvková, $n=10$. Počet relevantních charakteristik je $m=6$, protože 1.charakteristiku je možné zanedbat (nabývá ve všech variantách stejné hodnoty a nemá tudíž žádnou rozlišovací schopnost). 2.charakteristiku lze převést z intervalového hodnocení na neintervalové jednoduše: horní hranice je u všech variant, kde údaj nechybí, 16°C . Charakteristika se dá reinterpretovat jako "doporučené teplotní rozmezí při 3 a více vrstvách oblečení" a např. 2.variante se dá přiřadit hodnota 17°C . Dále u 4. charakteristiky je zvažován pouze údaj týkající se délky horní části, necht je tato délka v ideálním případě 215 cm (tento údaj tedy představuje cílovou hodnotu). Vzhledem k tomu, že není známa hodnota normy pro 6. a 7. charakteristiku, budu brát za relevantní pouze skutečnost, zda hodnota charakteristiky normy vyhovuje nebo nevyhovuje. Každá z těchto charakteristik tak bude nabývat pouze dvou možných hodnot: 1 - vyhovuje normě, 0 - nevyhovuje normě.

8.1 STEJNÉ VÁHY VŠECH CHARAKTERISTIK, METODA VZDÁLENOSTI

Prisoudím-li všem charakteristikám stejnou váhu, lze úlohu řešit třeba následujícím způsobem.

Ideální a nedosažitelný spací pytel má na základě množiny dostupných spacích pytlů následující parametry (uvedeno je, zda je příslušná charakteristika maximem nebo minimem a dále jednotky, ve kterých je charakteristika uváděna):

$$\mathbf{x}^* = (19 ; 1160 ; 215 ; 5,8 ; 1 ; 1).$$

max	min	min			
[$^{\circ}\text{C}$]	[g]	[cm]	[W/K/m ²]		

V úloze se dá užít teorie mlhavých množin. Ideální varianta se tímto přiřadí vektor

$$\mathbf{x}^* = (1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1).$$

Funkce příslušnosti $\mu_j(\mathbf{x}_i)$ se definuje následovně:

1. Je-li x_j^* maximem, je $\mu_j(\mathbf{x}_i) = x_{ij} / x_j^*$.
2. Je-li x_j^* minimem, je $\mu_j(\mathbf{x}_i) = x_j^* / x_{ij}$.
3. Je-li x_j^* cílovou hodnotou, je $\mu_j(\mathbf{x}_i) = (1/2(x_{ij}/x_j^* + x_j^*/x_{ij}))^{-1}$,

$i=1\dots 10, j=2\dots 7$. Všechny údaje budou tímto krokem převedeny na souměřitelné jednotky. Pro agregaci lze užít metodu vzdálenosti od ideálního jednotkového vektoru (6.3.2)

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) = \left(\sum_{j \in P_i} (1 - \mu_j(x_{ij}))^2 \right) / |P_i|^{1/2},$$

$|P_i|$ označuje počet prvku množiny P_i . Výsledky shrnuje následující tabulka.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrstv	•	0,895	•	1	•	0,842	0,842	1	0,895	0,895
hmot.	0,892	0,693	0,991	0,550	0,879	1	0,617	0,634	0,714	0,803
hcást	0,995	0,998	0,997	0,987	1	1	0,999	1	0,992	•
prop.	0,892	0,866	1	0,983	0,951	0,763	0,674	0,935	0,829	0,817
vod.	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
prod.	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
vzd.	0,452	0,143	0,447	0,184	0,451	0,424	0,215	0,152	0,142	0,465
por.	9.	2.	7.	4.	8.	6.	5.	3.	1.	10.

Tabulka 8.1: Stejné váhy, metoda vzdálenosti

8.2 PRÍMÝ ODHAD VAH, METODA VZDÁLENOSTI

Mohu se pokusit odhadnout váhy prirazené jednotlivým charakteristikám primo. Váhový vektor \mathbf{p} má dle mých preferenci tvar

$$\mathbf{p} = (0,10; 0,15; 0,05; 0,25; 0,25; 0,20).$$

Váha 0,10 prirazená 2.charakteristice pritom odráží skutenost, že teplotní rozmezí je u všech variant téměř shodné. K agregaci nyní použiji vážené euklidovské vzdálenosti pri použití údaju z tabulky 8.1.

$$d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}^*) = \left(\frac{\sum_{j \in P_i} p_j (1 - \mu_j(x_{ij}))^2}{\sum_{j \in P_i} p_j} \right)^{1/2}.$$

Výsledky shrnuje tabulka 8.2.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vzd.	0,477	0,140	0,471	0,175	0,475	0,516	0,226	0,145	0,144	0,528
por.	8.	1.	6.	4.	7.	9.	5.	3.	2.	10.

Tabulka 8.2: Prímý odhad vah, metoda vzdálenosti

8.3 PRÍMÝ ODHAD VAH, METODA PORADÍ

V tabulce 8.3 je uvedeno poradí jednotlivých variant z hlediska jednotlivých charakteristik (serazení je vzestupné, nejlepší hodnote charakteristiky odpovídá nejvyšší poradové číslo prirazené odpovídající variante). V prípade, že charakteristika nabývá stejné hodnoty ve více variantách, je temto variantám prirazeno poradí, které se získá jako aritmetický prumer príslušných poradí. Napr. u 7.charakteristiky prísluší 1.,3. a 5.variante 1.-3. poradí, výsledné poradí je tedy $(1+3)/2=2$.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrstv	•	4	•	6,5	•	1,5	1,5	6,5	4	4
hmot.	8	4	9	1	7	10	2	3	5	6
hcást	3	5	4	1	8	7	6	9	2	•
prop.	6	5	10	9	8	2	1	7	4	3
vod.	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	1,5	6,5	6,5	6,5	1,5
prod.	2	7	2	7	2	7	7	7	7	7

Tabulka 8.3: Poradí variant dle jednotlivých charakteristik

Za agregát vezmu výraz (6.3.2)

$$r_i = \frac{\sum_{j \in P_i} p_j (k_j - 1) r_{ij}}{\sum_{j \in P_i} p_j (k_j - 1)},$$

hodnoty r_{ij} jsou poradí z tabulky 8.3. k_j nabývá v tomto případě tří možných hodnot ($k_2=7, k_4=9$, v ostatních případech je $k_j=10$).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
por.	5,432	5,581	6,767	6,142	6,071	4,355	4,101	6,303	5,338	4,027
	6.	5.	1.	3.	4.	8.	9.	2.	7.	10.

Tabulka 8.4: Prímý odhad vah, metoda váženého součtu poradí

8.4 SAATYHO METODA ODHADU VAH, METODA VZDÁLENOSTI A METODA PORADÍ

Vektor vah \mathbf{p}' byl odhadnut pomocí Saatyho metody (3.6.1) při použití softwaru EXPERT CHOICE (výsledky jsou přiloženy v závěru této kapitoly):

$$\mathbf{p}' = (0,005; 0,079; 0,045; 0,265; 0,359; 0,196).$$

Tento odhad se dá porovnat s prímým odhadem vah (vektor \mathbf{p}), napr. jako rozdíl

$$\mathbf{p}' - \mathbf{p} = (-0,045; -0,071; -0,005; 0,015; 0,109; -0,004).$$

U 4.,5. a 7.charakteristiky se tento odhad váhy téměř shoduje s prímým odhadem, největší rozdíl nastává u 6.charakteristiky.

S využitím váhového vektoru \mathbf{p}' , údajů z tabulek 8.1 a 8.3 a výše popsaných metod agregace charakteristik (8.2, 8.3) lze dojít k výsledkům, uvedeným v tabulkách 8.5 a 8.6.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vzd.	0,460	0,113	0,456	0,127	0,458	0,613	0,203	0,108	0,122	0,624
por.	8.	2.	6.	4.	7.	9.	5.	1.	3.	10.

Tabulka 8.5: Saatyho metoda odhadu vah, metoda vzdálenosti

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
	5,397	5,835	6,652	6,609	6,090	3,654	4,534	6,555	5,522	3,555
por.	7.	5.	1.	2.	4.	9.	8.	3.	6.	10.

Tabulka 8.6: Saatyho metoda odhadu vah, metoda váženého součtu poradí

8.5 SHRNUTÍ VÝSLEDKU

Všechny výsledky shrnuje tabulka 8.7.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
stejně váhy m. vzdálenosti	9.	2.	7.	4.	8.	6.	5.	3.	1.	10.
prímý odhad vah, m. vzdál.	8.	1.	6.	4.	7.	9.	5.	3.	2.	10.
prímý odhad vah, m. poradí	6.	5.	1.	3.	4.	8.	9.	2.	7.	10.
odhad Saaty, m. vzdál.	8.	2.	6.	4.	7.	9.	5.	1.	3.	10.
odhad Saaty, m. poradí	7.	5.	1.	2.	4.	9.	8.	3.	6.	10.

Tabulka 8.7: Srovnávací tabulka

Je videt, že každá z metod vede ke zcela odlišnému serazení množiny spacích pytlu (jedinou výjimku tvorí spací pytel c.10, který je všemi metodami vyhodnocen jako nejhorší). Pritom v prípade, kdy je zvažován stejný váhový vektor (at už přímo odhadnutý nebo vypocítaný Saatyho metodou) vedou různé metody agregace k velmi rozdílným výsledkum (napr. u prímého odhadu vah je 2.spací pytel pri použití metody vzdálenosti vyhodnocen jako nejlepší, pri použití metody poradí až jako 5.). Větší podobnost vykazují naopak usporádání, která sice využívají různých váhových vektoru, ale stejných metod agregace. Tato skutečnost může být zapríčinena jednak způsobem, jakým každá z metod využívá dostupné informace o variantách (metoda vzdálenosti bere v úvahu hodnoty, které charakteristiky v jednotlivých variantách nabývají), jednak obecně způsobem definice agregace (napr. způsobem definice poradí prirazeného variante u metody poradí).

V celé této práci je zduraznováno, že optimum je relativní a že rozhoduje duvera rozhodovatele v to, že optimum nalezl. Obecně tedy záleží na preferencích rozhodovatele, jakým způsobem využije údaje ze souhrnné tabulky pro svoje rozhodnutí. Za optimální bych tak mohla považovat spací pytel c.8, který vyazuje dle všech metod přijatelné stabilní umístění. Stejně tak mohu položit větší duraz na výsledky získané metodou vzdálenosti a za optimální považovat spací pytel

c.2 (toto by byla moje osobní optimální varianta). Větší důraz na metodu poradí by vedl k volbě spacího pytle c.3.

ZÁVER

Pokusila jsem se napsat text, který (snad alespon trochu) shrnuje základní principy a přístupy k vícekriteriální optimalizaci. V textu mi nešlo o matematickou exaktnost, ale spíše o to "co je za tím", jaká logika se skrývá za nejruznejšími metodami. K tomu slouží i uvádené příklady.

Nebylo mým cílem vycerpat dusledne celou oblast vícekriteriální optimalizace, nebylo by to stejne možné. Chtela jsem napsat jakýsi úvodní text, který by si mohl precíst kdokoli, kdo o vícekriteriální optimalizaci nic neví (asi jako já pred pul rokem) a chtel by o ní získat základní přehled. Nakolik se mi to nepodarilo, necht posoudí sám případný ctenár.

Zároveň dekuji RNDr. M.Cernému, CSc. za ochotu a za trpelivost, se kterou cetl jednotlivé kapitoly.

Použitá literatura:

- 1.Bouška, J.; Cerný, M.; Glückaufová,D. : Iinteraktivní postupy rozhodování. ACADEMIA, Praha 1984.
- 2.Cerný, M.; Glückaufová,D. : Vícekriteriální rozhodování za neurcitosti. ACADEMIA, Praha 1987.
- 3.Cerný, M.; Glückaufová,D.; Toms, M. : Metody komplexního vyhodnocování variant. ACADEMIA, Praha 1980.
- 4.Dedek, O. : Teorie portfolia v prostoru výnosu a rizika. in: Politická ekonomie, 4/1992.
- 5.Manas, M. : Teorie her a její ekonomické aplikace. SPN, Praha 1988.
- 6.Manas, M.: Optimalizacní metody. SNTL, Praha 1974.
- 7.Zeleny, M. : Multiple Criteria Decision Making. McGraw-Hill, 1982.
- 8.MF Dnes. 31.1.1996.

Príloha 8.1: Tabuľka s údajmi o vyhodnocovaných spacích pytlích

Príloha 8.2: Matice párových porovnaní dôležitosti jednotlivých charakteristik pro odhad vah Saatyho metodou a odhad techto vah (výstup EXPERT CHOICE)

Príloha 8.3: Váhy jednotlivých charakteristik odhadnuté Saatyho metodou (výstup EXPERT CHOICE)

Príloha 8.1: Tabuľka s údajmi o vyhodnocovaných spacích pytlích

Príloha 8.2: Matice párových porovnaní dôležitosti jednotlivých charakteristik pro odhad vah Saatyho metodou a odhad techto vah (výstup EXPERT CHOICE)

Príloha 8.3: Váhy jednotlivých charakteristik odhadnuté Saatyho metodou (výstup EXPERT CHOICE)

Príloha 8.1: Tabuľka s údajmi o vyhodnocovaných spacích pytlích

Príloha 8.2: Matice párových porovnaní dôležitosti jednotlivých charakteristik pro odhad vah Saatyho metodou a odhad techto vah (výstup EXPERT CHOICE)

Príloha 8.3: Váhy jednotlivých charakteristik odhadnuté Saatyho metodou (výstup EXPERT CHOICE)