Central European Review of Economic Issues
EKONOMICKÁ REVUE

Oceňování obchodovaných warrantů pomocí NIG modelu

Petr GAPKO, Charles University in Prague[i]

Abstract

In the last two decades a special market with option contracts specialized for retail investors has developed in Europe. Warrant had become the right option contract with corresponding attributes. Substantial part of this work is pointed at possibilities and ways of warrant pricing. A useful innovation is the usage of pricing models based on alternative distributions. In our work, we use class of generalized hyperbolic distributions, which demonstrates good empirical performance in describing stock returns. The problem is that this class of distributions is mathematically rather more demanding but after handling these mathematical difficulties there is a new way opening for describing performance of stock behavior. In this work, we show the pricing of warrants with a ČEZ share as an underlying asset. The worse performance of the theoretically better hyperbolic model can be explained by a short memory of the Czech capital market.

Keywords

Binomial model, Black-Scholes model, hyperbolic distribution, hyperbolic model, volatility, warrant.

JEL Classification: G11, G12, G24

[i] Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague, Opletalova 26, 110 00 Praha 1, Czech Republic.
petr.gapko@seznam.cz
This research is due to the support provided by the Czech Science Foundation (GAČR) under the project No. 402/09/H045 and Science Foundation of Charles University (GAUK) 46108.

1. Úvod

V několika posledních letech se českým retailovým investorům rozšířila nabídka investičních možností o investiční nástroje zvané *warranty*. Ve své podstatě jsou to finanční deriváty velmi podobné opčním kontraktům. Stejně jako opce ztělesňuje warrant právo na nákup či na prodej aktiva za podmínek stanovených v emisním prospektu. Warranty se od opcí odlišují zejména tím, že jsou určeny pro retail. Hlavní odlišnosti tedy spočívají ve kvalitě obchodování, shrnuty jsou v tabulce 1.

V našem článku se zabýváme metodami oceňování warrantů, které (díky jejich podobnosti s opcemi), mohou být převzaty z teorie oceňování opčních kontraktů. Srovnání oceňování warrantů není v moderní literatuře popsáno, pravděpodobně právě díky podobnosti warrantů s opcemi. Jedná se nám především o srovnání moderního přístupu oceňování, založeného na alternativním rozdělení výnosů finančních aktiv a reprezentovaného hyperbolickým modelem oceňování aktiv (viz další odstavec), se standardně používanými metodami, konkrétně binomickým a Black-Scholesovým modelem. Naším předpokladem je, že hyperbolický model by měl lépe a přesněji oceňovat obchodované warranty.

Metody moderního oceňování opčních kontraktů se datují zpět do roku 1973, kdy Fisher Black a Myron Scholes publikovali dnes už slavný Black-Scholesův model oceňování finančních aktiv (Black a Scholes, 1973). Alternativní metodou oceňování k Blackovi a Scholesovi pro diskrétní čas je tzv. Binomický model (Cox a kol., 1979). Další alternativou, která opouští předpoklad normálního rozdělení hodnoty podklado-

© 2010 Published by VŠB-TU Ostrava. All rights reserved.

vého aktiva, je tzv. *hyperbolický model* (Eberlein a Prause, 2002).

V první části článku představíme použité metody ocenění. Jelikož binomický a Black-Scholesův model byly již nesčetněkrát v literatuře popsány, shrneme pouze základní body těchto metod a podrobněji se budeme věnovat třetímu, hyperbolickému modelu.

V další části budeme aplikovat představené modely na ocenění vybraných call warrantů vypsaných na český akciový titul ČEZ. Velmi zajímavé je hlavně srovnání metodologie ocenění a následné testování kvality jednotlivých modelů. Výsledkem je pak porovnání ocenění představenými modely metodou R^2 a střední kvadratickou odchylkou.

2. Použité oceňovací modely

V této kapitole představíme modely, kterými se v práci zabýváme a které v závěru práce srovnáváme. Jedná se o tři koncepčně rozdílné modely. Jako základ pro srovnání nám poslouží Black-Scholesův model oceňování finančních aktiv. Jako diskrétní model použijeme binomický model a jako model, který předpokládá jiné než normálné rozdělení finančních aktiv, nám poslouží hyperbolický model.

2.1 Binomický model

Prvním ze škály modelů používaných k oceňování opcí je binomický model. Jako jediný z představených modelů pracuje binomický model s diskrétním časem. Cena akcie se vyvíjí v diskrétním čase, čili vývoj ceny je rozdělen do jednotlivých časových okamžiků, kdy nás od předchozího okamžiku dělí určitá změna času. Binomický vzorec je již překonanou záležitostí, ovšem má stále své místo na několika webových serverech zabývajících se problematikou opcí, a to zejména při oceňování amerických opcí či při oceňování složitějších, strukturovaných derivátů (Cox a kol., 1979).

Binomický model je založen na principu binomického stromu, jehož řešením lze dojít k následujícímu rekurzivnímu vzorci:

$$C = \frac{\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} p^j (1-p)^{n-j} \max\{0; u^j d^{n-j} S - X\}\right)}{(1+r)^n}, \quad (1)$$

kde C je cena call opce, n počet období, p pravděpodobnost růstu ceny, j aktuální časové období, S sepotová cena podkladového aktiva, X vypořádací cena opce/warrantu a r bezriziková úroková míra.

Cena put opce (P) se dá odvodit z put-call parity. Vztah má následující podobu:

$$P_t + S_t = C_t + Xe^{-rt}. \quad (2)$$

2.2 Black-Scholesův model

Black-Scholesova formule pro oceňování opcí je postavena na několika základních kamenech. Prvním z nich je, že akcie je částice, která se pohybuje tzv. *Brownovým pohybem*. Brownův pohyb je Wienerův proces, můžeme jej zapsat v následujícím tvaru:

$\{S_t\}$ následuje Brownův pohyb, jestliže

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (3)$$

kde W_t je Wienerův proces, μ trendová konstanta a σ směrodatná odchylka. Celý vzorec se dá aplikovat na případ ocenění aktiv jednoduchým dosazením

$$\Delta P / P = \mu \Delta t + \sigma \Delta W, I, \quad (4)$$

kde ΔP je $P_{t+\Delta t} - P_t$, $\mu\Delta t$ je deterministický člen a $\sigma\Delta W$ stochastický člen. Drobnými úpravami získáme verzi rovnice ve spojitém čase:

$$dP / P = \mu dt + \sigma \Delta dW. \quad (5)$$

Z této rovnice pak aplikací Itôovy věty (Itô, 1951) a dalšími úpravami získáme diferenciální rovnici pro cenu C call opce:

$$dC = \left(\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{\mu S \delta C}{\delta S} + \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \delta^2 C}{\delta S^2} \right) dt + \frac{\sigma S \delta C}{\delta S dW}. \quad (6)$$

Použitím bezrizikové úrokové míry můžeme přejít k Black-Scholesově diferenciální rovnici:

Tabulka 1 Shrnutí rozdílů mezi opcí a warrantem

Opce	**Warrant**
Obchodovány většinou na opčních burzách	Obchodovány na burzách cenných papírů
Nemá mezinárodní kód, poznává se podle parametrů	Cenný papír s ISIN a WKN
Emitentem v podstatě kdokoliv	Emitentem většinou jen velké finanční instituce
Investor může vstoupit jak do dlouhé, tak do krátké strany kontraktu	Investor vstupuje pouze do dlouhé strany kontraktu
Splatnost 1 měsíc až 2 roky	Splatnost 6 měsíců až 5 let
Nemá určený emisní objem	Emitent emituje určitý počet ks warrantu, určí tedy mimo jiné emisní objem

$$\frac{\delta C}{\delta t}+\frac{rS\delta C}{\delta S}+\frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \delta^2 C}{\delta S^2}=rC. \qquad (7)$$

Díky rizikové neutralitě rovnice vůči emitentovi můžeme rovnici upravit. Výsledný tvar oceňovacího vzorce pak bude vypadat následovně:

$$C_t = S_t N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2), \qquad (8)$$

kde N (…) značí normované normální rozdělení (normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem), X je vypořádací cena opce a

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad (9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Vzorec pro put opci dostaneme stejně jako v případě binomického modelu využitím put-call parity. Po dosazení rovnice put-call parity do Black-Scholesovy oceňovací formule získáme přímý vztah pro výpočet ceny put opce založený na Brownově pohybu:

$$P_t = Xe^{-rt}N(-d_2) - S_t N(-d_1). \qquad (10)$$

Odvození Black-Scholesova modelu je v této práci pouze nastíněno, podrobným odvozením se nemá cenu zde zabývat, jelikož toto odvození již bylo popsáno v nepřeberném množství jak cizojazyčných, tak domácích publikací. Podrobná analýza by tedy nebyla originální a zbytečně by narušovala strukturu práce.

2.3 Zobecněný hyperbolický model

Posledním modelem, o kterém bude zmínka v této práci, je tzv. *zobecněný hyperbolický model*. Tento model má naprosto jiné základy než ostatní popsané modely. Největší a nejdůležitější rozdíl je, že se v tomto oceňovacím modelu používá zobecněné hyperbolické rozdělení. Tato třída rozdělení byla vyvinuta v roce 1977 (Barndorff-Nielsen, 1977) a původně byla používána pro popisování fyzikálních jevů a závislostí. Teprve v roce 1995 (Eberlein a Keller, 1995) byla tato rozdělení poprvé použita v souvislosti s popisováním chování na kapitálových trzích.

Zobecněné hyperbolické rozdělení

Pro $x \in R$ je zobecněné hyperbolické rozdělení definováno následující charakteristickou funkcí:

$$gh(x;\lambda,\alpha,\beta,\delta,\mu) = a(\lambda,\alpha,\beta,\delta)\left(\delta^2+(x-\mu)^2\right)^{(\lambda-0,5)0,5} \times$$
$$\times K_{\lambda-0,5}\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)e^{\beta(x-\mu)}, \qquad (11)$$

kde $a(\lambda,\alpha,\beta,\delta)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\lambda-0,5}\delta^{\lambda}K_{\lambda}\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)}$ je normovací faktor takový, aby byla oblast křivky < 1 a $K_\lambda(x)=\frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1}\exp\left(-\frac{1}{2}x(y+y^{-1})\right)dy$ je modifikovaná Besselovská funkce (Abramowitz a Stegun, 1968) třetího druhu s indexem λ.

Vlastnosti parametrů rovnice hustoty jsou následující:

$$\mu,\lambda \in R, \qquad (12)$$

$$-\alpha < \beta < \alpha, \qquad (13)$$

$$\alpha,\delta > 0. \qquad (14)$$

Někdy jsou uváděny alternativní parametrizace:

$$\zeta = \delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}, \rho = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad (15)$$

$$\xi = (1+\zeta)^{-\frac{1}{2}}, \chi = \xi\rho, \qquad (16)$$

$$\overline{\alpha} = \alpha\delta, \overline{\beta} = \beta\delta. \qquad (17)$$

Funkce jednotlivých parametrů můžeme popsat následovně: μ je lokační parametr, δ je parametr rozsahu, α a β určují tvar rozdělení a nakonec λ nám určuje podtřídu zobecněných hyperbolických rozdělení a je přímo spjatá s mohutností chvostů rozdělení. Pro λ = 1 tak dostáváme tzv. *hyperbolické rozdělení*, které je charakteristické tím, že jeho logaritmická hustota má tvar hyperboly. Hyperbolické rozdělení je asi největším zjednodušením a je numericky nejpohodlnějším z celé třídy zobecněných hyperbolických rozdělení. Pokud bychom dosadili do původní rovnice hustoty, dostaneme zjednodušené vyjádření hustoty pro hyperbolické rozdělení:

$$\mathrm{hyp}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2\delta\alpha K_1\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)} \times$$
$$\times \exp\left(-\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}+\beta(x-\mu)\right) \qquad (18)$$

Pro λ = –0,5 dostáváme tzv. *normální inverzní Gaussovo (NIG) rozdělení*. NIG má oproti ostatním podtřídám zobecněných hyperbolických rozdělení jednu nespornou výhodu, a to, že pod konvolucí vykazuje uzavřenou formu. Charakteristická funkce NIG rozdělení vypadá takto:

$$\mathrm{nig}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)\right) \times$$
$$\times \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}. \qquad (19)$$

Zobecněná hyperbolická rozdělení jsou daleko vhodnější pro popisování empiricky vysledovaných výnosů z aktiv než klasická normální rozdělení hlavně proto, že jsou špičatější a mají těžší chvosty než normální rozdělení. Rovněž empirické studie z německých a amerických burz dokazují, že zobecněná hyperbolická rozdělení dokáží daleko lépe korespondovat s empiricky pozorovanými výnosy (Fajardo a Farias, 2002).

Funkce generující momenty

Momenty generující funkce zobecněných hyperbolických rozdělení je definována ve tvaru:

$$M(u) = \exp(u\mu)\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-(\beta+u)^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \frac{K_\lambda\left(\delta\sqrt{\alpha^2-(\beta+\mu)^2}\right)}{K_\lambda\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)},$$

$$|\beta+u| < \alpha. \tag{20}$$

Momenty generující funkce pro jednotlivé podtřídy zobecněných hyperbolických rozdělení obdržíme dosazením příslušné hodnoty parametru λ do obecného vyjádření moment generující funkce.

Popsali jsme novou třídu rozdělení, která se daleko lépe hodí pro účely oceňování derivátů, protože lépe popisuje chování výnosů, než doposud nejvíce používané normální rozdělení. Nyní zbývá popsat, jakým způsobem se zobecněné hyperbolické rozdělení implementuje do oceňovací formule. V Black-Scholesově modelu jsou logaritmy výnosů popisovány normálním rozdělením, které do oceňovací formule vstupuje pomocí Brownova pohybu. Je nám tedy jasné, že Brownův pohyb pro ocenění opcí či warrantů za použití zobecněných hyperbolických rozdělení použít nemůžeme. Chybí nám tedy základní stavební kámen, ze kterého bychom se mohli odrazit. Tuto mezeru můžeme zaplnit jiným způsobem modelování výnosů, a sice tzv. *Lévyho procesem*.[1]

Dalším stavebním kamenem oceňovacího modelu opcí je určitá míru odpovídající martingalu. Vypůjčíme si postup aplikovaný Gerberem a Shiu (Gerber a Shiu, 1994) a pro potřeby oceňování použijeme tzv. *Esscherovu transformaci* (Esscher, 1932). Pravděpodobnostní míra pro rizikově neutrální svět je jako Esscherova míra definována takto:

$$dP^\vartheta = \exp(\vartheta X_t - t\log(M^\vartheta))dP \tag{21}$$

a pro model výnosů akcií ve tvaru:

$$dS_t = \sigma_t S_{t-1} dX_t + b_t S_{t-1} dt, \tag{22}$$

kde X_t je Lévyho proces a kde trendová i driftová konstanta jsou deterministické spojité funkce.

Pro zobecněná hyperbolická rozdělení je Esscherova transformace určena v případě rizikově neutrálního světa následovně:

$$GH^{*t,\vartheta}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,\lambda) = \frac{\exp(\vartheta x)}{M^t(\vartheta)} GH^{*t}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,\lambda). \tag{23}$$

V této rovnici je M moment generující funkce a parametr ϑ získáme jako parametr, který řeší rovnici $r = \log\frac{M(\vartheta+1)}{M(\vartheta)}$ (r je bezriziková úroková míra).

Konečně, cena derivátu s výplatní funkcí $h(S_t)$ je dána rovnicí:

$$C = E_{Q\vartheta}\left[e^{-rT}h(S_T)\right] = e^{-rT}\int h(S_0 e^x)dQ^\vartheta_{X_T} \tag{24}$$

a pro evropskou kupní opci (nebo evropský kupní warrant) s výplatní funkcí $h(S_t) = (S_T - K)^+$ bude rovnice ceny vypadat následovně:

$$C = S_0 \int_{\log\frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*T,\vartheta_0+1}(x)dx - e^{-rT}K\int_{\log\frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*T,\vartheta_0}(x)dx, \tag{25}$$

kde K je tentokrát vypořádací cena (strike),[2] S_0 je spotová tržní cena podkladového aktiva a C cena evropské kupní opce (evropského kupního warrantu).

3. Data a výsledky

3.1 Popis použitých dat

Jako testovací vzorek jsme použili call warranty na nejlikvidnější akcii obchodovanou na pražské burze, akcii společnosti ČEZ. Na tuto akcii je vypsáno nejvíce warrantů. Testovacím datem jsme určili 28. 4. 2006, všechny ceny jsou tedy kalkulovány k tomuto datu. Uvedené starší datum je určeno vzhledem k tomu, že v této době neexistovaly výraznější fluktuace způsobené finanční krizí a objemy obchodů byly ustálené.

K 28. 4. 2006 existovalo celkem 21 evropských call warrantů, které mají jako podkladové aktivum právě akcii ČEZu. Všechny tyto warranty se obchodují na burze EUWAX. Emitenty warrantů jsou Deutsche Bank, Sal. Oppenheim, Reiffeisen Centrobank a Erste Bank.

3.2 Odhad hustoty a ocenění warrantu pomocí hyperbolického modelu

Pro zjednodušení celého procesu výpočtu ceny jednotlivých warrantů použijeme NIG rozdělení hodnoty akcie ČEZ, které vykazuje uzavřenou formu. Nebude tak třeba používat FFT algoritmy k transformaci distribuční funkce. Funkce hustoty pro NIG rozdělení vypadá následovně:

[1] Jeden z Lévyho procesů, nazvaný *Lévyho zobecněný hyperbolický proces* nahrazuje v novém modelu oceňování derivátů v Black-Scholesově modelu používaný Wienerův proces a byl představen ve dvou publikacích (Prause, 1999) (Raible, 2000).

[2] Zde uvádíme jako vypořádací cenu K, nikoliv X. Důvodem je, že X by se mohlo snadno zaměnit za x z hustoty GH.

$$\mathrm{nig}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu)=\frac{\alpha\delta}{\mu}\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)\right)\times \times\frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}. \qquad (26)$$

V případě NIG rozdělení nebudeme používat žádné další parametrizace. Odhad koeficientů provedeme opět pomocí MLE odhadu a samotná Log-likelihood funkce bude pro NIG rozdělení vypadat následovně:

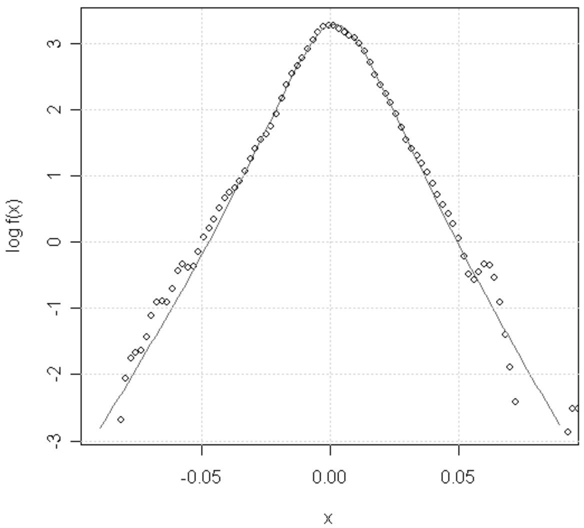
$$L=\sum_{i=1}^{n}\log\left(nig(x_i;\alpha,\beta,\delta,\mu)\right). \qquad (27)$$

Pro odhad metodou MLE jsme použili software *R*. Výsledné hodnoty jsou shrnuty v tabulce 2.

Tabulka 2 Odhad parametrů NIG rozdělení

Parametr	α	β	δ	M
Startovací hodnota	1	0	1	var(x)
Výsledná hodnota	47,97847	–1,27520	0,01853	0,00203

Jelikož jsme nepoužili žádné alternativní parametrizace, výsledkem jsou přímo hodnoty základních parametrů. Obrázek 1 ukazuje logaritmickou hustotu odhadovaného NIG rozdělení.



Obrázek 1 Logaritmická hustota odhadovaného NIG rozdělení

Goodness-of-fit test

V literatuře se většinou pro srovnání ditribucí používá několik standardních testů. Prvním z nich je χ-kvadrát test.[3] Tento test není vhodný pro hodnocení performancí spojitých rozdělení (Press a kol., 1992), proto je lepší použít robustnější test. Rozhodli jsme se pro test, který se jmenuje *Kolmogorovova vzdálenost*. Tento test je vhodnější pro zkoumání spojitých rozdělení a podle dřívějších srovnání s χ-kvadrát testem vykazuje daleko lepší výsledky při zkoumání větších vzorků dat (Eberlein a Keller, 1995). Kolmogorovova vzdálenost je definována předpisem:

$$KS=\max\left|F_{emp}(x)-F_{est}(x)\right|, \qquad (28)$$

kde $F_{emp}(x)$ je distribuční funkce empirického rozdělení a $F_{est}(x)$ je distribuční funkce odhadovaného rozdělení. Výsledky srovnání Kolmogorovovou vzdáleností jsou shrnuty v tabulce 3.

Tabulka 3 Kolmogorovova vzdálenost

Rozdělení	Kolmogorovova vzdálenost
Normální	0,07347
NIG	0,04724

Z tabulky je patrný značný rozdíl mezi normálním a NIG rozdělením, kde je jasně vidět, o kolik lépe popisuje reálná data právě NIG rozdělení.

3.3 Esscherova transformace

Dalším krokem při oceňování je použití Lévyho procesu do oceňovacího algoritmu. Pokud chceme použít pohyb řízený Lévyho procesem, musíme nejprve najít ekvivalentní martingalovou míru. Esscherova míra se ukázala při oceňování derivátů alternativními metodami jako vhodné řešení (Gerber a Shiu, 1994). Už jsme analyticky popsali postup, kde hledáme parametr ϑ jako řešení rovnice pro denní úrokovou míru r určené moment generujícími funkcemi $r=\log\frac{M(\vartheta+1)}{M(\vartheta)}$. Celé vyjádření denní úrokové míry pomocí moment generujících funkcí lze zjednodušit. Výsledná rovnice pro NIG rozdělení vypadá následovně:

$$r_{NIG}=0{,}00203+0{,}01853\sqrt{47{,}97848^2-\left(-1{,}2752+\vartheta\right)^2}- -0{,}01853\sqrt{47{,}97848^2-\left(-1{,}2752+\vartheta+1\right)^2}. \qquad (29)$$

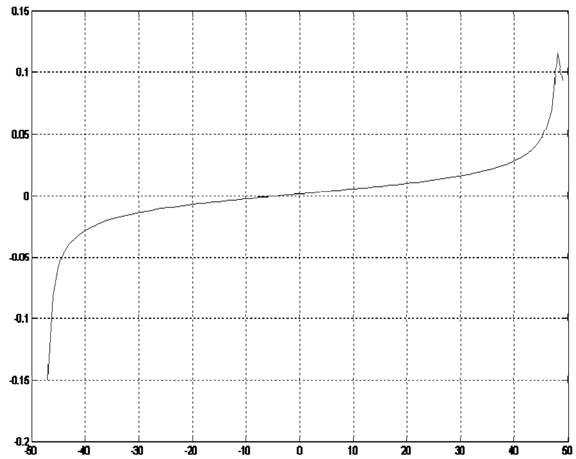
Problém je samotné numerické řešení rovnice, zvláště pro případ hyperbolického rozdělení, kde se znovu setkáváme s Besselovskými funkcemi. Analyticky rovnice vyřešit nejde, proto použijeme metodu, která je známa jako *refined bracketing method*. Při této metodě řešení odhadneme interval, který je podezřelý z nabytí hodnoty, kterou potřebujeme získat jako úrokovou míru. V praxi od rovnice odečteme denní úrokovou míru tak, abychom na pravé straně dostali nulu, budeme tedy hledat, kdy se rovnice rovná nule. Pro samotné řešení použijeme software MATLAB, konkrétně příkaz *incsearch*. Onen odhado-

[3] Tento test byl použit ke stejnému účelu jako v této práci např. v (Fajardo a Farias, 2002).

vaný interval je dán přímo, neboť pro hledané řešení platí následující omezující podmínky:

$$\begin{aligned} \vartheta &> -\alpha - \beta, \\ \vartheta &< \alpha - \beta - 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Po dosazení tedy víme, že hledaný parametr se musí nacházet v intervalu (–46,70327; 48,25367). Průběh funkce, u které hledáme průnik s osou x, je ilustrován na obrázku 2.



Obrázek 2: Graf funkce ϑ pro NIG rozdělení

Výsledná hodnota parametru ϑ je –4,11634. Tuto hodnotu dosadíme do samotné Esscherovy transformace ve tvaru:

$$gh^{*t,\vartheta}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,\lambda) = \frac{\exp(\vartheta x)}{M^t(\vartheta)} gh^{*t}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,\lambda), \quad (31)$$

kde za $gh(x,...)$ dosadíme hustotu příslušného rozdělení.

3.4 Zobecněný hyperbolický Lévyho pohyb

Každé rozdělení z třídy zobecněných hyperbolických rozdělení je nekonečně dělitelné (Barndorff-Nielsen, 1977), můžeme tedy konstruovat Lévyho procesy založené na této třídě rozdělení.[4] Problém však je, že jedině pro NIG rozdělení existuje uzavřená forma. Tuto formu lze vypočítat podle předpisu:

$$gh^{*t,\vartheta}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,-0{,}5) = \frac{\exp(\vartheta x)}{M^t(\vartheta)} nig(x;\alpha,\beta,t\delta,t\mu). \quad (32)$$

Pro centrovanou formu NIG rozdělení pak získáme vzorec pro rizikově neutrální NIG rozdělení ve tvaru:

$$gh^{*t,\vartheta}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu,-0{,}5) = nig(x;\alpha,\beta,+\vartheta,t\delta,0). \quad (33)$$

Do samotného oceňovacího modelu ve tvaru

$$C = S_0 \int_{\log\frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*T,\vartheta_0+1}(x)dx - e^{-rT} K \int_{\log\frac{K}{S_0}}^{\infty} GH^{*T,\vartheta_0}(x)dx \quad (34)$$

v případě ocenění hyperbolickým modelem založeným na NIG rozdělení stačí za distribuční funkce dosadit přímo upravenou hustotu NIG rozdělení bez jakéhokoliv použití Fourierových transformací. Poslední krok ocenění spočívá v numerickém počítání integrálů.

Za povšimnutí stojí samotná konstrukce oceňovacího vzorce. Můžeme si všimnout, že celý vzorec je konstruován podobně jako Black-Scholesova formule. Rozdíl je u spotové ceny podkladového aktiva a diskontované vypořádací ceny vynásobenými příslušnými pravděpodobnostmi. Bohužel matematický základ těchto pravděpodobností je daleko složitější než u Black-Scholesovy formule, a tudíž i celé ocenění je matematicky náročnější.

3.5 Výsledky ocenění

Pro srovnání performancí všech testovaných modelů jsme zvolili R^2 statistiku a střední kvadratickou chybu. Výsledné hodnoty R^2 statistik jednotlivých oceňovacích vzorců jsou shrnuty v tabulce 4.

Tabulka 4 R^2 statistika modelů oceňování

Model	NIG hyperbolický	Binomický	Black–Scholesův
R^2	0,99697	0,99735	0,99964

Zajímavostí jsou bezesporu vysoké hodnoty R^2 statistiky u všech tří modelů. Bohužel tato statistika není příliš vypovídající, protože ceny jednotlivých warrantů se od sebe podstatně liší. Proto přikládáme v tabulce 5 výsledky srovnání střední kvadratickou odchylkou.

Tabulka 5 Střední kvadratická odchylka modelů oceňování

Model	NIG hyperbolický	Binomický	Black-Scholesův
σ^2	0,05170	0,00471	0,03884

Pokud srovnáme statistiky jednotlivých modelů, vidíme, že skutečně nejlíp oceňuje warranty Black-Scholesův model. Za ním se umístil model binomický a až poslední skončil model hyperbolický. Selhání hyperbolického modelu je podivuhodné, především pokud vezmeme v úvahu, že rozdělení, na kterém je tento model postaven, popisuje podkladová data daleko lépe, než normální rozdělení z Black-Scholesova modelu. Selhání hyperbolického modelu si tak vysvětlujeme prostým faktem, že retailový obchodník je pouze příjemcem ceny, kterou tvoří emitent warrantu. Jelikož hyperbolický model je poněkud složitější konstrukce, usuzujeme, že emitenti tvoří cenu warrantu jiným (pravděpodobně binomickým)

[4] Barndorff-Nielsen dokázal, že zobecněné inverzní Gaussovo (GIG) rozdělení je nekonečně dělitelné. Jelikož jsou zobecněná hyperbolická rozdělení de facto směsicí normálního a GIG rozdělení, jsou i zobecněná hyperbolická rozdělení nekonečně dělitelná.

vzorcem. Druhým důvodem může být struktura českého kapitálového trhu, který ve zkoumané době vykazoval silný a stabilní růstový trend, a tudíž *chyběla* část distribuce výnosů z kapitálových aktiv.

4. Závěr

Cílem práce bylo srovnat oceňovací metody derivátů zvaných warrant. Toto srovnání vyznělo jednoznačně pozitivně pro Black-Scholesův model oceňování, a to i přesto, že používá zastaralé normální rozdělení, které špatně popisuje výnos zkoumané akcie.

Selhání NIG hyperbolického modelu může být způsobeno zejména krátkou a špatnou „pamětí“ českého kapitálového trhu. Zejména volatilita výnosů akcie ČEZ (která se může těšit největším zobchodovaným objemům celé burzy) byla ve zkoumaném období konstruována jinak, než volatilita zahraničních akcií. Pravděpodobně krátká historie spolu s neexistencí extrémních hodnot výnosů může způsobit špatnou performanci modelů, které jsou založeny na velmi přesných distribučních funkcích. Toto, spolu se způsobem, jakým funguje trh obchodovaných warrantů, způsobilo špatnou performanci modelu, který je teoreticky přesnější.

Námětem pro další výzkum je jednoznačně zkoumání nových dat a vyvinutí nové aproximace hyperbolického modelu, která by byla svým použitím vhodná pro finanční deriváty amerického stylu.

Poslední dobou se ve světě začínají objevovat i exotické typy warrantů, a proto nový model pro tyto exotické deriváty, založený na třídě generalizovaných hyperbolických rozdělení, by mohl být uplatnitelný nejen pro další výzkum, ale rovněž v širší praxi mezi předními světovými emitenty.

Literatura

ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I.A. (1968). *Handbook of Mathematical Functions.* New York: Dover Publ.

BARNDORFF-NIELSEN, O. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society London* A (353): 401–419.

BLACK, F., SCHOLES, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81 (3)*:* 637–654.

COX, J.C., ROSS, S.A., RUBINSTEIN, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics* 7*:* 229–263.

EBERLEIN, E., KELLER, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli 1:* 281–299.

EBERLEIN, E., PRAUSE, K. (2002). The generalized hyperbolic model: financial derivatives and risk measures. In: Geman, H., Madan, D., Pliska, S., Vorst, T. (Eds.). *Mathematical Finance-Bachelier Congress 2000*, pp. 245-267. Berlin: Springer.

ESSCHER, F. (1932). On the probability function in the collective theory of risk. *Skandinavisk Aktuarietidskrift* 15: 175–195.

FAJARDO, J., FARIAS, A. (2002). Generalized Hyperbolic Distributions and Brazilian. *Working Paper* 52, Ibmec, Banco Central Do Brasil.

GERBER, H., SHIU, E. (1994). Option Pricing by Esscher Transforms. *Transaction of Society of Actuaries* 46.

ITÔ, K. (1951). On stochastic differential equations. *Memoirs of the American Mathematical Society* 4: 1–51.

PRAUSE, K. (1999). How to use NIG laws to measure market risk. *FDM Preprint* 65, University of Freiburg.

PRESS, W., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W., FLANNERY, B. (1992). *Numerical Recipes in C.* Cambridge: Cambridge University Press.

RAIBLE, S. (2000). *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics, and Empirical Facts.* Dissertation, University of Freiburg.

Další zdroje

www.akcie.cz
www.euwax.de
www.onvista.de
www.pse.cz