Univerzita Karlova v Praze

Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

Bakalářská práce

2006 **Vu Phuong Thuy**

Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Úvod do evoluční teorie her

Vypracovala: Vu Phuong Thuy
Konzultant: PhDr. Martin Gregor
Akademický rok: 2005/2006

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a použila pouze uvedené prameny a literaturu.

V Plzni dne 4.6.2006 ....

Poděkování

Chtěla bych poděkovat PhDr. Martinu Gregorovi za konzultace, vstřícnost a cenné rady při psaní této práce.

Obsah

Úvod

V mikroekonomii, která se zabývá zkoumáním rozhodování jednotlivých ekonomických subjektů – jednotlivců (domácností) a firem, hraje klíčovou roli předpoklad *racionality* ekonomických aktérů.

Jednou z oblastí, kterou využívá ekonomie k analýze strategických interakcí mezi ekonomickými subjekty, je teorie her. Prostřednictvím jejího aparátu lze naleznout rovnovážné řešení modelované situace, případně určit, které vlivy způsobí vychýlení ze stavu rovnováhy, resp. jaké vlivy brání ekonomickému systému směřovat k rovnováze.

Centrálním rovnovážným konceptem klasické teorie her je Nashova rovnováha, která staví na předpokladu dokonalé racionality jedinců. Racionální chování v teorii her respektuje jeho ekonomickém pojetí a bývá charakterizováno dvěma aspekty. Za prvé, hráči vždy *maximalizují* svůj užitek (tato maximalizace nestojí hráče žádný náklad) v prostředí dokonalých, ne nutně úplných informací, kde se hráči rozhodují simultánně a nezávisle na sobě. Za druhé, očekávání hráčů ohledně chování ostatních jsou *konzistentní*, tj. se předpokládá, že zkušenosti nabyté v minulosti jsou dostačující pro hráče, aby vždy správně odhadli, jak se zachovají ostatní. Ve světle každodenních zkušeností a experimentálních výsledků se však tyto předpoklady ukázaly diskutabilními, neboť ne vždy se hráči chovají racionálně ve smyslu, v jakém od nich očekává klasická teorie her.

Aby byla teorie her užitečným pomocníkem při zkoumání zákonitostí ekonomického života společnosti, je třeba, abychom dokázali přesvědčivým způsobem odůvodnit a pochopit základní předpoklady, na kterých stavíme náš model. Poskytnutí rozumných a přesvědčivých ospravedlnění Nashovy rovnováhy se stalou výzvou pro teoretiky po mnoha let.

Jedno z vysvětlení nabízí evoluční teorie her, která staví na ideji, že úspěšnější formy chování mají tendence více převládat až nakonec v populaci zůstanou pouze ty formy, které jsou nejúspěšnější. Pokud populace dospěje do stabilního stavu, pak všechny strategie na tom musí být stejně dobře a proto tento stav musí být Nashovou rovnováhou.

Dva hlavní znaky odlišují evoluční přístup od klasického. Za prvé se předpokládá, že hráči disponují omezenou racionalitou (bounded rationality) (v některých případech dokonce naivitou) ve smyslu, že nejsou natolik racionální nebo dobře informovaní, aby měli správná očekávání ohledně chování ostatních hráčů. Za druhé se zde využívá explicitní dynamický proces, který se zaměřuje na zkoumání procesu přizpůsobování chování hráčů v průběhu času, s tím, jak se učí a získávají zkušenosti o chování ostatních hráčů. V rámci těchto předpokladů úspěšnější formy chování nepřevažují pouze díky *selekčnímu tlaku* proti méně úspěšnějším formám, ale také díky faktu, že hráči úspěšné formy chování *imitují*.

V této práci se pokusíme podat základní přehled evoluční teorie her s dvěma cíly. Za první cíl si klademe ukázat, že upustíme-li od požadavku dokonalé racionality hráčů, výsledek, k němuž hra evolucí nakonec dospěje, je Nashovou rovnováhou. Naším druhým cílem je demonstrovat, jakým způsobem lze využít koncepty a nástroje evoluční teorie her k analýze některých problematik soudobé ekonomie.

Práce je organizována následovně. Protože evoluční teorie her kombinuje statický koncept evolučně stabilní strategie a dynamický koncept replikátoru dynamiky, začneme statickou analýzou, ve které rozvedeme základní vlastnosti rovnovážného konceptu evolučně stabilní strategie a její vztah k Nashově rovnováze.

V druhé kapitole se budeme věnovat dynamické analýze, kde představíme klasický model evoluční dynamiky, tzv. replikátor dynamiky. Tento typ dynamiky reflektuje Darwinovskou selekci, podle kterého selekční tlak zvýhodňuje takové strategie, které jsou lepší ve smyslu vyšší výplaty (která v tomto případě vyjadřuje reprodukční schopnost hráčů).

Protože v prvních dvou kapitolách jsme se pohybovali pouze v rámci symetrických her jedné populace, ve třetí kapitole rozšíříme rovnovážné koncepty evoluční teorie her pro situaci asymetrických her, které modelují interakce mezi jedinci dvou populací s odlišnými (ekonomickými) rolemi.

Ve čtvrté kapitole se prostřednictvím dvou modelů pokusíme ukázat, jakým způsobem lze pracovat s nástroji evoluční teorie. V prvním modelu se budeme zabývat prací d'Artiguese a Vignola (2003), kteří vysvětlují výskyt současných forem terorismu prostřednictvím evoluční analýzy koordinační hry mezinárodního obchodu mezi zeměmi. Druhý model interpretuje práci Cressmana, Morissona a Wena (1998), kteří zkoumají vliv policejní aktivity a výší trestů za spáchání zločinu na míru majetkové kriminality z evolučního hlediska.

Pátá kapitola bude věnována oblastem, ve kterých dle našeho názoru evoluční teorie her významným způsobem přispěla k lepšímu pochopení.

1

Statická analýza

1.1 Úvod

Statické hledisko analýzy evolučního procesu má nezastupitelné místo v evoluční teorii her, neboť dává odpověď na otázku, za jakých podmínek můžeme pojmout strategii za evolučně stabilní. Taková strategie by měla být odolná vůči evolučnímu tlaku. Centrální koncept zde představuje evolučně stabilní strategie (ESS), prvně definovaný Maynardem Smithem a Pricem (1973) v biologii a téměř o deset let později rozpracován Maynardem Smithem v díle *Evolution and the Theory of Games*.

1.1.1 Logika zvířecího konfliktu

Maynard Smith a Price (1973) položili základy evoluční teorie her definováním staticky rovnovážného konceptu nazvaného *evolučně stabilní strategií*. Ve svém článku *The Logic of Animal Conflict* (1973) pomocí počítačových simulací ukázali, že vnitrodruhové souboje zvířat o samičku, kořist, výhodné teritorium apod., mívají v přírodě spíše charakter ‚simulace války', tj. bojující jedinci málokdy využívají nebezpečné nebo smrtelné nástroje k vážnému zranění soupeře, a nejsou přínosem pouze pro druh jako takový, nýbrž přinášejí prospěch také samotným jedincům zúčastněných v soubojích.

Autoři uvažovali velkou populaci anonymních, náhodně se párujících jedinců, kteří se zúčastňovali souboje, jenž měl formu symetrické bimaticové hry, ve které byli hráči identičtí jak ve výplatě, tak ve množině strategií, které měli k dispozici. Vytvořili dva typy modelů soubojů, v prvním z nich měly bojující jedinci k dispozici instrumenty, které mohly soupeře vážně zranit. V druhém modelu bojující takové nástroje neměly, tudíž vítězství bylo přisouzeno tomu, kdo v boji vydržel nejdéle. V obou modelech se pak snažili zjistit, zda nejpreferovanější strategie pro jedince (ve smyslu nejvyšší výplaty) je právě onou strategií ‚simulované války'.

V modelu s útočnými instrumenty měli jedinci k dispozici tři taktiky: zastrašovací (C), která nezpůsobovala vážné zranění; nebezpečnou (D), která mohla soupeře vážně zranit s pravděpodobností p, zraněný jedinec pak vždy opouštěl hru a prohrál; a ústup (R), která indikovala vítězství protihráče. Souboj měl podobu opakované bimaticové hry s konečným počtem kol, kde v každém kole hráči volili jednu z výše uvedených taktik. Výplatní matice hry byla funkcí o třech proměnných: výhoda výhry v porovnání se ztrátou z prohry, újma v případě vážného zranění a časová a energetická ztráta v souboji. Maynard Smith a Price v počítačové simulaci uvažovali pět smíšených strategií, sestrojených z čistých strategií *C*, *D* a *R* s různou mírou pravděpodobností výskytu každé z nich:

„Myška“. Nikdy nevolí *D*. Pokud soupeř zvolí *D*, pak ustoupí (tj. volí *R*) v případě, že hrozí vážné zranění, jinak pokračuje ve hře se strategií *C* dokud hra nevyčerpá stanovený počet kol.

„Jestřáb“. Vždy volí *D*. Pokračuje v souboji dokud není vážně zraněný nebo dokud soupeř neustoupí.

„Rváč“. Volí *D* pokud hraje první. Volí *D* jako odpověď na *C*, volí *C* v odpověď na *D*, ustupuje pokud soupeř volí *D* podruhé.

„Mstitel“. Volí *C* pokud hraje první. Pokud protihráč volí *C*, také zvolí *C*, ale volí ústup v případě, že hra překročila stanovený počet kol. Pokud soupeř volí *D*, s vysokou pravděpodobností oplácí stejnou strategií *D*.

„Vyšetřující mstitel“. Pokud hraje první, nebo pokud oponent volí *C*, s vysokou pravděpodobností volí *C* a s nízkou pravděpodobností volí *D*. V případě, že by souboj překročil stanovený počet kol, volí ústup (*R*). Pokud zvolil *D* v prvním kole, nebo zvolil *D* v reakci na soupeřovu volbu *C* (tento jev nazývali Maynard Smith a Price jako sonda (probe)), pak pokračuje ve volbě *D*, pokud soupeř neoplácí, v opačném případě volí *C*. Pokud obdrží od protihráče sondu, s vysokou pravděpodobností volí *D* v dalším kole.

Výplatní matice soubojů s počtem kol 2000 vypadala následovně:

Tabulka 1.1: Průměrné výplaty vnitrodruhových soubojů[1]

	Myška	Jestřáb	Rváč	Mstitel	Vyšetřujcí mstitel
Myška	29.0, 29.0	**19.5*, 80.0***	19.5, 80.0*	29.0*, 29.0	17.2, 56.7
Jestřáb	**80.0*, 19.5***	-19.5, -19.5	74.6*, 4.9	-18.1, -22.3	-18.9, -20.1
Rváč	80.0*, 19.5	4.9, 74.6*	41.5, 41.5	11.9, 57.1	11.2, 59.4
Mstitel	29.0, 29.0*	-22.3, -18,1	57.1, 11.9	**29.0*, 29.0***	23.1*, 26.9
Vyšetřující mstitel	56.7, 17.2	-20.1, -18.9	59.4, 11.2	26.9, 23.1*	21.9, 21.9

Zdroj: Maynard Smith, Price (1973)

Porovnáním výplaty každé strategie oproti ostatním strategiím zjistili, že ačkoliv hra má 3 Nashovy rovnováhy: (jestřáb, myška), (myška, jestřáb) a (mstitel, mstitel), jedinou evolučně stabilní strategií je strategie *mstitel*. A to z důvodu, že dvojice (mstitel, mstitel) je jedinou symetrickou Nashovou rovnováhou v čistých strategiích.[2] Na základě tohoto závěru potvrdili domněnku, že tendence smrtelně nezraňovat soupeře v bojích je prospěšný i pro jedince, neboť hráči i v případě, kdy sledují pouze vlastní zájem, vybírají takové strategie, které představují souboj v omezené míře.

Ve druhém modelu, kde hráči neměli k dispozici útočné instrumenty a výhra patřila hráči, který vydržel nejdéle, existovala pouze jedna smíšená evolučně stabilní strategie. Pokud byla splněna rovnost: $p(x) = \frac{1}{v}\exp(-\frac{x}{v})$, pak smíšená strategie σ, ve které hráči volili maximální akceptovatelnou hodnotu časové a energetické újmy $m \in (x; x+\delta x)$ s pravděpodobností $p(x)\delta x$, kde x je předem stanovená hodnota výplaty a δ je konstanta, byla evolučně stabilní. V případě výhry vítěz obdržel výplatu $v-m$, poražený zaplatil újmu $-m$.

[1] Znaménko '*' značí strategii, která je optimální reakcí (best response) odpovídajícího hráče na strategii zvolenou protihráčem.

[2] Ačkoliv je Maynardu Smithovi a Priceovi přisuzováno prvenství ve formulaci koncepce evolučně stabilní strategie, ve vlastním modelu provedli špatnou dedukci závěru. Strategie mstitel není evolučně stabilní, neboť může být napadena mutantskou strategií myška (lze poměrně snadno ověřit, že v případě invaze mutantů používajících tuto strategii není splněna podmínka stability – viz. definice 1.2.2). Gintis (2000, str. 157) pomocí počítačového softwaru našel pro hru s touto výplatní maticí jedinou smíšenou evolučně stabilní strategii, složenou ze strategií jestřáb s pravděpodobností 0.576 a rváč s pravděpodobností 0.424.

Koncept evolučně stabilní strategie hrála klíčovou roli při argumentaci Maynard Smithova a Priceova modelu. Evolučně stabilní strategii prezentovali jako takovou strategii, že v případě jejího zvolení většinou členů populace neexistovala žádná jiná mutantská strategie, která by měla vyšší reprodukční schopnost (tj. vyšší hodnotu výplaty). Formálně: Nechť $\pi(s_i, s_j)$ je očekávaná hodnota strategie s_i oproti strategii s_j. Pak s_i je evolučně stabilní strategií (ESS) právě tehdy, když pro všechna s_j platí, že $\pi(s_i, s_i) \geq \pi(s_j, s_i)$, a pokud pro nějakou strategii s_j platí, že $\pi(s_i, s_i) = \pi(s_j, s_i)$, pak podmínka evoluční stability vyžaduje, aby $\pi(s_i, s_j) = \pi(s_j, s_j)$.

1.2 Základní analytické nástroje a koncepty

1.2.1 Teoretický rámec

Jako ve většině literatury, i zde budeme uvažovat jedinou, (nekonečně) velkou populaci,[3] ve které se jedinci náhodně párují a zúčastňují bimaticové hry ve strategické formě *G*. Dále předpokládejme, že hra je symetrická, všichni hráči mají k dispozici společnou množinu strategií $S = (s_1, ..., s_n)$ s výplatní maticí $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,n}}$, kde a_{ij} značí výplatu hráče, který zvolil čistou strategii s_i, zatímco jeho protihráč zvolil čistou strategii s_j. Ze symetričnosti vyplývá, že výplata druhého hráče bude a_{ji}. Každá dvojice hráčů se zúčastňuje identické symetrické bimaticové hry $G = (A, A^T)$, kde čtvercová matice *A* typu $n \times n$ nemusí nutně být symetrická. [4]

---

[3] Předpoklad velikosti populace sleduje čtyři cíle (Friedman 1998): 1) velikost populace může vzrůstat či klesat v rozumných mezích v čase, aniž by významně ovlivnila specifičnost stavu populace; 2) lze aplikovat zákon velkých čísel, který modelu umožňuje ignorovat náhodné fluktuace (vzhledem k tomu, že zákon velkých čísel lze aplikovat pouze na konečný počet náhodných proměnných, je třeba pojmout další technická opatření při jeho aplikaci na nekonečně velkou populaci (Vega-Redondo 2003)); 3) díky velkému počtu hráčů můžeme uvažovat, že se hráči systematicky nesnaží ovlivňovat chování ostatních hráčů, 4) poslední cíl je čistě matematický – velikost populace umožňuje užití diferenciálních počtů.

[4] Hra dvou hráčů je symetrická, pokud hráči disponují stejnou množinou strategií a pro jejich výplatní funkce platí:

$$i = 1, 2$$
$$\pi_1(s_1, s_2) = \pi_2(s_2, s_1)$$
$$\pi_1(s_2, s_1) = \pi_2(s_1, s_2)$$

Obecně, každý hráč má také možnost se rozhodnout pro smíšenou strategii $\sigma = p_1 s_1 + ... + p_n s_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, která představuje rozložení pravděpodobností nad množinou čistých strategií *S*. Smíšená strategie je tedy náhodný mechanismus pro výběr mezi čistými strategiemi. Jinými slovy, při každém užití smíšené strategie nakonec hráč uplatní některou z čistých strategií $s_i \in S$. Pokud $p_j = 1$ a $p_i = 0,\ i = 1...,n,\ i \neq j,$ pak se jedná se o čistou strategii s_j. Očekávaná výplata jedince, který zvolil smíšenou strategii σ proti jinému hráči se strategií $\sigma' = q_1 s_1 + ... + q_n s_n$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, bude:

$$\pi(\sigma, \sigma') = \sigma^T A \sigma' = \sum_{i,j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j .$$

Pokud bude podíl populace volící strategii s_i v čase *t* roven p_i, pak můžeme smíšenou strategii σ interpretovat jako stav populace v čase *t*: $\sigma = p_1 s_1 + ... + p_n s_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.[5] Očekávaná výplata v čase *t* pro hráče typu *i* (tj. volící strategii s_i) před tím, než mu bude náhodně přidělen protihráč při stavu populace σ, bude:

$$\pi(s_i, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j .$$

V případě smíšených strategií označíme typem σ' takového hráče, který volí smíšenou strategii $\sigma' = q_1 s_1 + ... + q_n s_n$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$. Jeho očekávaná výplata při stavu populace σ bude:

$$\pi(\sigma', \sigma) = \sigma'^T A \sigma = \sum_{i,j=1}^{n} q_i a_{ij} p_j .$$

1.2.2 Evolučně stabilní strategie

Nechť $\sigma = p_1 s_1 + ... + p_n s_n$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ představuje stav populace v daném čase, kde každý jedinec volí stejnou smíšenou strategii σ. Pak se taková populace nazývá jako *monomorfní* (jednoho tvaru, tj. homogenní ve smíšené strategii). Očekávaná výplata náhodně vybraného jedince při střetu s jiným náhodně vybraným jedincem bude $\pi(\sigma, \sigma) = \sigma^T A \sigma$. Nyní předpokládejme, že malá část populace, označme ε, je reprezentována jedinci volící jinou strategii σ', tzv. mutantskou strategii. Nový stav

pro každou dvojici strategií $(s_1, s_2) \in S \times S$.

[5] Jelikož se jedná o velkou populaci, můžeme aplikovat zákon velkých čísel a interpretovat σ dvěma způsoby: ex ante jako pravděpodobnost a ex post jako frekvence výskytu čistých strategií v populaci. (Vega-Redondo 2003).

populace bude $\tau = (1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'$, očekávaná výplata normálního jedince (tj. typu σ) při stavu populace τ bude

$$\pi(\sigma,\tau) = \sigma^T A\tau = \sigma^T A\left[(1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'\right] = (1-\varepsilon)\pi(\sigma,\sigma) + \varepsilon\pi(\sigma,\sigma'),$$

a očekávaná výplata mutanta bude

$$\pi(\sigma',\tau) = \sigma'^T A\tau = \sigma'^T A\left[(1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'\right] = (1-\varepsilon)\pi(\sigma',\sigma) + \varepsilon\pi(\sigma',\sigma').$$

Strategie σ je *evolučně stabilní strategií*, pokud existuje nějaká hranice, kdy mutace menší než tato hranice mají horší očekávanou výplatu:

$$\sigma^T A\left[(1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'\right] > \sigma'^T A\left[(1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'\right]$$

Koncept evolučně stabilní strategie nám dává odpověď na otázku, zda může být původně monomorfní populace napadená malým množstvím alternativních jedinců (mutantů), kteří přijali odlišnou strategii $\sigma' \neq \sigma$. Napadení je úspěšné v případě, že mutantský jedinec obdrží alespoň stejnou hodnotu výplaty jako normální jedinec (a tedy alespoň stejnou schopnost přežít a reprodukovat). Potom populace se strategií σ je evolučně nestabilní. Naopak, σ je evolučně stabilní strategií, pokud nemůže být napadená žádnou mutantskou strategií pro dostatečně malé ε. Jinými slovy, v případě objevení mutanta v populaci s frekvencí $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ podmínka evoluční stability vyžaduje, aby normální jedinec byl na tom lépe než mutant co do výplaty při novém populačním stavu $\tau = (1-\varepsilon)\sigma + \varepsilon\sigma'$.

1.2.3 ESS a rovnováha

Evolučně stabilní strategie je úzce spjatá s klíčovým rovnovážným konceptem nekooperativních her, Nashovou rovnováhou, neboť již sama definice evolučně stabilní strategie představuje *zjemnění* (refinement) Nashovy rovnováhy (Maynard Smith 1982)[6]:

Nechť $\sigma \in \sum$ je evolučně stabilní strategií v bimaticové hře G, kde $\sum$ značí n-rozměrný simplex. Pak

$\forall \sigma' \in \sum, \sigma^T A\sigma \geq \sigma'^T A\sigma$;

$\forall \sigma' \in \sum\ (\sigma \neq \sigma'),\ \sigma^T A\sigma = \sigma'^T A\sigma \Rightarrow \sigma^T A\sigma' > \sigma'^T A\sigma'$.

*A naopak, pokud nějaká strategie $\sigma \in \sum$ splňuje podmínky (1) a (2), pak je ES*S.

---

[6] Citováno podle: Vega-Redondo (2003, str. 358 – 359).

Podmínka (1) říká, že (σ,σ), která je ESS, je symetrickou Nashovou rovnováhou bimaticové hry $G=(A,A^T)$.[7] Opačná implikace však neplatí, je-li strategie σ Nashovou rovnováhou, nemusí nutně být evolučně stabilní. Aby byla ESS, musí splňovat podmínku stability (2), tzn. že výplata normálního jedince při střetu s mutantem musí být vyšší než výplata při střetnutí dvou mutantů.

Kritéria pro evoluční stabilitu jsou tedy náročnější než pro Nashovu rovnováhu. Evolučně stabilní strategie musí být alespoň slabou optimální reakcí (weak best response) na sebe sama, tj. musí tvořit symetrickou slabou Nashovu rovnováhu. Pokud však tato slabá Nashova rovnováha nesplňuje podmínku stability, nemůže být evolučně stabilní. Gintis (2000) a Vega-Redondo (2003) uvádějí řadu dalších vlastností evolučně stabilní strategie symetrické bimaticové hry ve spojení s Nashovou rovnováhou:

každá striktní Nashova rovnováha[8] je v evoluční hře ESS, neboť pokud je (σ,σ) striktní Nashovou rovnováhou, pak pro všechny $\sigma'\neq\sigma$ platí:

$$\pi(\sigma',\sigma)<\pi(\sigma,\sigma);$$

každá evoluční hra, která má konečný počet čistých strategií, má také konečný počet evolučně stabilních strategií. Předpokládáme-li, že tato hra má nekonečně mnoho ESS, pak vzhledem ke konečnému počtu čistých strategií musí existovat dvě evolučně stabilní strategie, například σ a υ, které obsahují naprosto identické čisté strategie. Strategie υ je jednou z optimálních reakcí na σ, proto z podmínky stability vyplývá, že σ musí mít vyšší výplatu při interakci s υ než má υ proti sobě. To je ale v rozporu s první podmínkou definice evolučně stabilní strategie, která říká, že pokud je υ ESS, pak je vůči sama sobě optimální reakcí. Z toho vyplývá, že nemohou existovat dvě evolučně stabilní strategie složené ze stejných čistých strategií a počet evolučně stabilních strategií musí být konečný;

jestliže je σ zcela smíšenou evolučně stabilní strategií (completely mixed Nash equilibrium),[9] pak je jedinou Nashovo rovnováhou hry a podmínka

$$\pi(\sigma,\sigma') = \sigma^{\mathrm{T}}A\sigma' > \sigma'^{\mathrm{T}}A\sigma' = \pi(\sigma',\sigma')$$

[7] Platí, že každá symetrická bimaticová hra má alespoň jednu symetrickou rovnováhu. Kromě toho může mít i nesymetrickou rovnováhu, ve které hráči volí různé strategie.

[8] Nashova rovnováha je striktní, pokud strategie zvolená každým hráčem v této rovnováze je jedinou optimální reakcí na strategie používané ostatními hráči.

[9] Pod pojmem zcela smíšenou evolučně stabilní strategií myslíme takovou strategii, která zahrnuje všechny čisté strategie, jež mají hráči k dispozici, s nenulovou pravděpodobností.

je splněna pro všechny smíšené strategie σ' odlišné od σ ;

je-li σ evolučně stabilní strategií, pak dvojice (σ, σ) je dokonalou rovnováhou (perfect equilibrium) hry;[10]

pokud mají hráči k dispozici dvě čisté strategie s_1 a s_2, pak hra má evolučně stabilní strategii v případě, že $\pi(s_1, s_1) \neq \pi(s_2, s_1)$ a $\pi(s_2, s_2) \neq \pi(s_1, s_2)$.

1.3 Ilustrativní příklady

1.3.1 Hrdlička vs. jestřáb

Uvedeme příklad evolučně stabilní strategie na dobře známém modelu „hrdličky a jestřábi". Uvažujme populaci jednoho druhu, která při boji staví pouze na dvou různých strategiích – agresivním chování (strategie jestřába) a mírumilovném chování (strategie hrdličky). Jestřáb bojuje vždy tvrdě a nesmlouvavě a vzdává se jen tehdy, je-li vážně zraněn (či zabit). Hrdlička se uchyluje pouze k symbolické hrozbě a při přímém útoku prchá nezraněna.

Předmětem boje může být například výhodné teritorium, které vede ke zvýšení „zdatnosti" jeho uživatele (a tím i jeho genu) o hodnotu *V*. Celková zdatnost poraženého přitom nemusí být nulová – jedinec jen zůstává v horším teritoriu. Ztrátu ze zranění oceníme hodnotou *C*. Budeme předpokládat, že všichni jestřábi jsou stejně schopní bojovníci, takže při vzájemném střetnutí každý z nich s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ zvítězí a se stejnou pravděpodobností bude zraněn a poražen. Při střetnutí dvou hrdliček bude teritorium sdíleno rovným dílem. Jedná-li se o nedělitelný zdroj, budeme opět uvažovat náhodné rozdělení mezi obě soupeřky.

Příslušná bimaticová hra pro libovolnou dvojici členů populace vypadá takto:

Tabulka 1.2: Jestřáb vs. hrdlička

	jestřáb	*hrdlička*
jestřáb	(*V* – *C*)/2, (*V* - *C*)/2	*V*, 0
hrdlička	0, *V*	*V*/2, *V*/2

Zdroj: Vega-Redondo (2003)

[10] Strategie dvou hráčů tvoří dokonalou rovnováhu právě tehdy, když je Nashovou rovnováhou, která nezahrnuje žádné slabě dominované strategie žádného hráče.

Při hledání evolučně stabilní strategie rozlišme následující případy:

1. $V > C$, strategie jestřáb je striktní Nashovou rovnováhou a je jedinou evolučně stabilní strategii, která je čistá. Strategie hrdlička není nikdy evolučně stabilní, protože populace hrdliček může být napadena jestřábím mutantem, jemuž se v populaci hrdliček daří lépe než hrdličkám samotným.
2. $V \leq C$, pak ani jedna z čistých strategií není evolučně stabilní (hra nemá ani žádnou rovnováhu v čistých strategiích) a nastává situace smíšené strategie σ: s pravděpodobností p použij strategii jestřáb (j), s pravděpodobností $1 - p$ použij strategii hrdlička (h):

$$\pi(j, pj + (1-p)h) = p\frac{V-C}{2} + \frac{1-p}{V} = V - p\frac{C+V}{2}$$
$$\pi(h, pj + (1-p)h) = p.0 + (1-p)\frac{V}{2} = (1-p)\frac{V}{2},$$

kde $\pi(j, pj + (1-p)h)$ je očekávaná výplata hráče volící čistou strategii jestřáb, zatímco zbytek populace volí smíšenou strategii $\sigma = pj + (1-p)h$. Analogicky, $\pi(h, pj + (1-p)h)$ je výplata hráče volící čistou strategii hrdlička, zatímco zbytek populace volí smíšenou strategii σ. Je-li σ Nashovou rovnováhou, pak musí platit:

$$\pi(j, pj + (1-p)h) = \pi(h, pj + (1-p)h)$$
$$V - p\frac{C+V}{2} = (1-p)\frac{V}{2}$$
$$\frac{V}{2} = p(\frac{C}{2} + \frac{V}{2} - \frac{V}{2})$$
$$p = \frac{V}{C} \rightarrow \sigma^* = \frac{V}{C}j + (1-\frac{V}{C})h.$$

Smíšená strategie $\sigma^* = \frac{V}{C}j + (1-\frac{V}{C})h$ tvoří jedinou symetrickou Nashovu rovnováhou pro každou náhodně spárovanou dvojici hráčů. Protože se jedná o smíšenou Nashovu rovnováhu, pro libovolnou smíšenou strategii $\sigma' = qj + (1-q)h$ musí platit, že je také optimální reakcí na σ^* a $\pi(\sigma^*, \sigma') = \pi(\sigma^*, \sigma^*)$. Aby byla σ^* ESS, musí platit podmínka stability:

$$\pi(\sigma',\sigma') < \pi(\sigma^*,\sigma^*) \rightarrow \ \pi(\sigma^*,\ \sigma') - \pi(\sigma',\ \sigma') > 0$$

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^*,\sigma') &= \frac{V}{C}\left(\frac{V-C}{2}p + V(1-p)\right) + \left(1-\frac{V}{C}\right)\left(0p + \frac{V}{2}(1-p)\right)\\ &= \frac{V^2}{2C}p - \frac{V}{2}p + \frac{V^2}{C} - \frac{V^2}{C}p + \frac{V}{2} - \frac{V}{2}p - \frac{V^2}{2C} + \frac{V^2}{2C}p\\ &= -Vp + \frac{V^2}{2C} + \frac{V}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi(\sigma',\sigma') &= q\left(\frac{V-C}{2}q + V(1-q)\right) + (1-q)\left(0q + \frac{V}{2}(1-q)\right) =\\ &= \frac{V}{2}q^2 - \frac{C}{2}q^2 + Vq - Vq^2 + \frac{V}{2} - \frac{V}{2}q - \frac{V}{2}q + \frac{V}{2}q^2 =\\ &= \frac{V}{2} - \frac{C}{2}q^2\end{aligned}$$

$$\pi(\sigma^*,\ \sigma') - \pi(\sigma',\ \sigma') = \frac{C}{2}q^2 - Vq + \frac{V^2}{2C} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{C}q - \frac{V}{\sqrt{C}}\right)^2 > 0$$

pro $\sigma^* \neq \sigma'$.

Podmínka stability je splněna a strategie $\sigma^* = \frac{V}{C}j + (1-\frac{V}{C})h$ je tedy evolučně stabilní.

Shrneme-li oba případy, pak pokud není zranění nákladné ($V \geq C$), pouze agresivní chování přežívá a pasivní mutant (strategie hrdlička) je zahuben. V případě, že energetická ztráta ze zranění je větší než hodnota zdroje ($V < C$), pak populace složená pouze z agresivních jedinců není evolučně stabilní, neboť pasivní mutant je na tom lépe při střetu s agresivním jedincem než agresivní jedinec při střetu s jiným agresivním jedincem. Jedinou evolučně stabilní strategií je v tomto případě smíšená strategie, podle které je podíl agresivních jedinců v populaci rovno $\frac{V}{C}$ a podíl pasivních jedinců rovno $1-\frac{V}{C}$. S tím, jak poroste energetická ztráta ze zranění, bude klesat podíl agresivních jedinců v populaci a počet střetů bez boje bude vzrůstat.

1.3.2 Invaze čistých mutantských strategií

Pokud má hra evolučně stabilní strategii, nemusí vždy být ‚nenapadnutelná‘ ve smyslu, že by členové velké populace měli vždy nejvyšší výplatu při současném napadení více druhy mutantů. Nashova rovnováha může být evolučně stabilní v případě invaze mutantů používajících čistou strategii, avšak tato stabilita nemusí platit v případě mutantů používajících smíšené strategie.

Takovým příkladem je hra s následující výplatní maticí:

Tabulka 1.4: Invaze čistých mutantských strategií

	A	*B*	*C*
A	2, 2	1, 2	1, 2
B	2, 1	0, 0	3, 3
C	2, 1	3, 3	0, 0

Zdroj: Osborne (2004)

Tato hra může například představovat spolupráci tří firem na společném projektu. Firmy stejného typu *A* vycházejí spolu dobře. Stejně tak firmy typu *B* a *C* ve spolupráci s typem *A*, zatímco spolupráce firem využívajících stejné strategie *B* nebo *C* nepřináší žádný výsledek. Spolupráce *B* a *C* naopak představuje ideální kombinaci. Snadno zjistíme, že strategie *A* je evolučně stabilní strategií: (*A*, *A*) je Nashovou rovnováhou, obě strategie *B* a *C* jsou optimálními reakcemi na *A*, $\pi(B,B) < \pi(A,B)$ a $\pi(C,C) < \pi(A,C)$. Evoluční stabilita však platí pouze pro čisté strategie, neboť lze najít smíšenou strategii σ', která je také optimální reakcí na *A* a má zároveň vyšší výplatu (např. pro $\sigma' = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ dostaneme $\pi(\sigma',\sigma') = \frac{3}{2} > \pi(A,\sigma') = 1$). Druhá podmínka ESS je tudíž porušená a strategie *A* není evolučně stabilní.

1.3.3 Neexistence ESS

Ne každá symetrická bimaticová hra musí mít evolučně stabilní strategii. Uvažujme například hru zvanou „kámen, nůžky, papír“ s následující výplatní maticí:

Tabulka 1.3: Kámen, nůžky, papír

	K	*N*	*P*
K	0, 0	1, -1	-1,1
N	-1,1	0, 0	1, -1
P	1, -1	-1,1	0, 0

Zdroj: Vega- Redondo (2003)

Tato výplatní matice reflektuje všeobecně známé pravidlo: *K* poráží *N*, *N* poráží *P* a *P* zase poráží *K*. Pokud se střetnou stejné strategie, nastává remíza. Z výplatní matice vyplývá, že hra nemá žádnou čistou Nashovu rovnováhu.

Pro smíšenou Nashovu rovnováhu platí:

$$\pi(p,q) = 1p_1q_2 - 1p_1(1-q_1-q_2) - 1p_2q_1 + 1p_2(1-q_1-q_2) + 1(1-p_1-p_2)q_1 - 1(1-p_1-p_2)q_2$$

$$\pi(p,q) = 3p_1q_2 - 3p_2q_1 - p_1 + p_2 + q_1 - q_2$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_1} = 3q_2 - 1 = 0 \rightarrow q_2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_2} = -3q_1 + 1 = 0 \rightarrow q_1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_1} = -3p_2 + 1 = 0 \rightarrow p_2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial q_2} = 3p_1 - 1 = 0 \rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$$

Hra má tedy jedinou smíšenou symetrickou Nashovu rovnováhu (σ^*, σ^*), kde $\sigma^* = \frac{1}{3}K + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P$. Zvolíme-li např. čistou strategii *K*, které odpovídá smíšená strategie $\sigma' = 1K + 0N + 0P$, pak

$$\pi(\sigma^*, \sigma^*) = \pi(\sigma', \sigma^*) = 0$$

$$\pi(\sigma^*, \sigma') = \pi(\sigma', \sigma') = 0.$$

Vzhledem k tomu, že podmínka stability není splněna, $\sigma^* = \frac{1}{3}K + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P$ není ESS, přestože je Nashovou rovnováhou.

1.3.4 Hra s vícenásobnými ESS

Na druhé straně nemusí vždy existovat pouze jedna evolučně stabilní strategie. Hra s výplatní maticí v tabulce 1.5 může být takovým příkladem:

Tabulka 1.5: Jestřáb vs. hrdlička vs. mstitel

	J	*H*	*M*
J	1/2(*V* – *C*), 1/2(*V* – *C*)	*V*, 0	1/2(*V* – *C*), 1/2(*V* – *C*)
H	0, *V*	1/2*V*, 1/2*V*	1/2*V* – *d*, 1/2*V* + *d*
M	1/2(*V* – *C*), 1/2(*V* – *C*)	1/2*V* + *d*, 1/2*V* – *d*	1/2*V*, 1/2*V*

Zdroj: Osborne (2004)

Tato hra je variací hry „jestřáb vs. hrdlička“, rozšířenou o strategii mstitel, který bojuje pouze v případě, že jeho soupeř zahájí boj. Dále předpokládejme, že strategie mstitel je lehce ve výhodě oproti strategii hrdlička, která nikdy nevstupuje do boje.

Navíc uvažujme, že hodnota d je menší než $\frac{1}{2}V$. Na základě vztahu mezi V a C rozlišme opět dva případy:

1. $V \geq C$. Hra má dvě čisté symetrické Nashovy rovnováhy: (J, J) a (M, M).

   Abychom zjistili, zda jsou ESS, ověříme podmínky:

$$\pi(J,J) = \pi(M,J) = \frac{1}{2}(V-C)$$

$$\pi(J,M) = \frac{1}{2}(V-C) < \pi(M,M) = \frac{1}{2}V,$$

podmínka stability není splněna pro strategii J, tudíž není evolučně stabilní. Pro strategii M máme

$$\pi(M,M) = \frac{1}{2}V > \pi(J,M) = \frac{1}{2}(V-C).$$

Jedná se tedy o striktní Nashovu rovnováhu a strategie M je evolučně stabilní. Dále nás zajímá, zda má hra nějaké smíšené symetrické Nashovy rovnováhy. Předpokládejme, že existuje v populaci smíšená symetrická Nashova rovnováha (σ,σ), kde $\sigma = pJ + qH + (1-p-q)M$. Mohou nastat následující možnosti:

(i) $p \neq 0$, $q \neq 0$, $1 - p - q \neq 0$

Je-li $\sigma = pJ + qH + (1-p-q)M$ Nashovou rovnováhou, pak musí platit, že každá z čistých strategií J, H a M je také optimální reakcí na σ, tj.

$$\pi(J,\sigma) = \pi(H,\sigma) = \pi(M,\sigma)$$

$$\pi(J,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C)p + Vq + \frac{1}{2}(V-C)(1-p-q) = \frac{V}{2}(q+1) - \frac{C}{2}(1-q)$$

$$\pi(H,\sigma) = 0p + \frac{1}{2}Vq + (\frac{1}{2}V - d)(1-p-q) = \frac{V}{2}(1-p) - d(1-p-q)$$

$$\pi(M,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C)p + (\frac{1}{2}V + d)q + \frac{1}{2}V(1-p-q).$$

Podívejme se například na dvojici $\pi(H,\sigma)$, $\pi(M,\sigma)$:

$$\pi(M,\sigma) - \pi(H,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C)p + (\frac{1}{2}V + d)q + \frac{1}{2}V(1-p-q) - [\frac{1}{2}V(1-p) - d(1-p-q)]$$

$$= \frac{1}{2}(V-C)p + d(1-p) > 0$$

$$\rightarrow \pi(\mathrm{M},\sigma) > \pi(\mathrm{H},\sigma)$$

(ii) $p = 0, q \neq 0, 1 - p - q \neq 0$

$$\pi(H,\sigma) = \frac{1}{2}Vq + (\frac{1}{2}V - d)(1-q) = \frac{1}{2}V - d(1-q)$$

$$\pi(M,\sigma) = (\frac{1}{2}V + d)q + \frac{1}{2}V(1-q) = \frac{1}{2}V + dq$$

$$\pi(M,\sigma) - \pi(H,\sigma) = \frac{1}{2}V + dq - \frac{1}{2}V + d(1-q) = d > 0$$

$$\rightarrow \pi(M,\sigma) > \pi(H,\sigma)$$

(iii) $p \neq 0, \; q = 0, 1 - p - q \neq 0$

$$\pi(J,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C)p + \frac{1}{2}(V-C)(1-p) = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}C$$

$$\pi(M,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C)p + \frac{1}{2}V(1-p) = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}Cp$$

$$\pi(M,\sigma) - \pi(J,\sigma) = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}Cp - \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}C(1-p) > 0$$

$$\rightarrow \pi(M,\sigma) > \pi(J,\sigma)$$

(iv) $p \neq 0, q \neq 0, 1 - p - q = 0$

$$\pi(J,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C) + Vq$$

$$\pi(H,\sigma) = \frac{1}{2}Vq$$

$$\pi(J,\sigma) - \pi(H,\sigma) = \frac{1}{2}(V-C) + Vq - \frac{1}{2}Vq = \frac{1}{2}(V-C) + \frac{1}{2}Vq > 0$$

$$\rightarrow \pi(J,\sigma) > \pi(H,\sigma).$$

Ve všech případech existovala vždy striktně dominující strategie, hráči proto neměli důvod optimalizovat očekávanou výplatu smíšenou strategií. Pro případ $V \geq C$ hra nemá žádnou smíšenou symetrickou Nashovu rovnováhu a jedinou evolučně smíšenou strategií je čistá strategie mstitel.

2. $V < C$. V tomto případě má hra 3 Nashovy rovnováhy v čistých strategiích: (H, J), (J, H) a (M, M). Z hlediska evoluční stability nás zajímá pouze symetrická rovnováha (M, M). Stejně jako v případě $V \geq C$ se jedná o striktní NE a strategie mstitel (M) je evolučně stabilní. Při hledání smíšených symetrických Nashových rovnováh postupujeme analogicky jako v předchozí části. Je vidět, že v případě smíšené strategie, kdy budou jedinci populace volit strategii mstitel s nulovou pravděpodobností, dostaneme hru „jestřáb vs. hrdlička“, která má

jedinou smíšenou evolučně stabilní strategii $\sigma = \frac{V}{C} J + (1 - \frac{V}{C}) H$. Lze snadno ověřit, že tato strategie je evolučně stabilní i v tomto případě. Pro ostatní alternativy p, q a $1 - p - q$ neexistuje žádná symetrická Nashova rovnováha ve smíšených strategiích. Pro situaci, kdy zranění je nákladné ($V < C$) existují tedy dvě evolučně stabilní strategie – čistá strategie mstitel (*M*) a smíšená strategie σ, která přisuzuje strategii jestřáb (*J*) pravděpodobnost $\frac{V}{C}$ a strategii hrdlička (*H*) pravděpodobnost $1 - \frac{V}{C}$.

1.4 Závěr

Podle Darwinovy evoluční teorie určitá forma chování přežívá pouze tehdy, pokud neexistuje jiná forma chování, která by měla lepší reprodukční schopnost. Při vzájemných interakcích jsou však vzorce chování ostatních organismů důležitým faktorem určení reprodukční schopnosti jednotlivců. Evoluční teorie her poskytuje prostředky pro zkoumání evoluce v takovém prostředí. Výplatní funkce zde měří biologickou zdatnost, resp. reprodukční zdatnost (očekávanou hodnotu zdravých potomků) jedinců. Namísto klasické teorie her, která ponechává výběr strategií na racionalitě hráčů, zde se předpokládá, že hráči jsou předprogramováni následovat určité strategie, které buď s vysokou pravděpodobností zdědili od svých rodičů (nebo svého rodiče v případě asexuální reprodukce), nebo s nízkou pravděpodobností obdrželi jako důsledek mutace. I přesto, že evoluční teorie her tímto předpokladem upouští od požadavku dokonalé racionality, výsledek, k němuž hra evolucí nakonec dospěje, je Nashovou rovnováhou. Znamená to, že evoluce může sloužit jako substitut racionality hráčů, klíčového předpokladu v klasické teorii her.

Centrální koncept statické analýzy, evolučně stabilní strategie, se omezuje především na monomorfní populaci, tedy na situaci, kdy všem členům populace je ex ante přisouzena stejná strategie σ a tudíž i stejná očekávaná hodnota výplaty, ačkoliv ex post se chování jedinců může lišit v závislosti na konkrétně zvolenou čistou strategii.

Nicméně v ekonomii i v biologii, kde ESS vznikla, je diverzita v chování a jiných charakteristických rysech často důležitým znakem pro pochopení stability zkoumané situace. Ne vždy může být tento fakt zohledněn v modelu ex post jako v případě monomorfní populace a musí být do něj přímo začleněn (stačí uvažovat například model prodejce – kupující).

V těchto případech lze uvažovat polymorfní populaci, ve které jedinci liší užíváním čisté strategie; podíly četnosti jedinců ale odpovídají pravděpodobnostem, s jakou čisté strategii přisuzuje smíšená strategie korespondující monomorfní populace. Pak i v tomto případě jsou podmínky evolučně stabilní strategie pro monomorfní populaci nutnou a postačující podmínkou lokální stability a rovnovážného stavu: mutace, jež změní podíly populace volící každou z čistých strategií, musí zároveň vytvořit takové změny ve výplatě, které způsobí posun podílů zpět do rovnovážného stavu (Osborne 2004, str. 403). Existenci smíšené evolučně stabilní strategie tudíž lze interpretovat monomorfně i polymorfně; oba typy populace mají identické vlastnosti.

2

Dynamická analýza

2.1 Úvod

Statická analýza poskytuje informaci o chování populace, jejíž členové směřují k Nashovsky rovnovážné strategii, která je evolučně stabilní. Otázkou zůstává, jak si můžeme být jisti, že hráči budou zrovna k této strategii směřovat. Zdůvodnění volby Nashovy rovnováhy v klasické teorie her, která spočívala na dokonalé racionalitě hráčů, se neukázalo jako příliš přesvědčivé. Jak již bylo řečeno v úvodu, existují četné výsledky a experimentální zkušenosti, které ukazují, že ne vždy se hráči chovají racionálně ve smyslu, v jakém od nich očekává klasická teorie her. Evoluční teorie her prostřednictvím dynamické analýzy nabízí alternativní řešení výše položené otázky za mírnějších předpokladů racionality hráčů.

Ústřední roli při studiu populační dynamiky má tzv. *replikátor dynamiky*, mechanismus, který umožňuje určité entitě přibližně replikovat sebe sama. Může mít podobu genu, organismu, strategie ve hře, víry, konvence či mnohem obecnější institucionální a kulturní formy.

Evoluční modely kombinují dva procesy. Způsob, jakým si hráči vybírají své strategie, korigují své předchozí volby a získávají tak zkušenosti, je popsán *selekčním mechanismem*. Množina strategií, ve které probíhá selekce, je tvořená *mutačním procesem*. Podle toho, na který z těchto dvou procesů se klade důraz, může být analýza evoluční dynamiky rozlišena na hledisko stochastické či deterministické. Stochastické modely konečné, ale velké populace se zaměřují především na vliv mutací a vyvozují predikce v podobě ustálené distribuce strategií v populaci v dlouhém období. Deterministické, časově nepřetržité dynamiky naopak kladou důraz na selekční proces a úlohu mutace zkoumají v rámci analýzy stability. Cílem analýzy je predikce dynamicky stabilních (smíšených) strategií.

V této části se budeme zabývat druhým tématem – evoluční dynamikou pro strategickou hru dvou hráčů z deterministického hlediska. Budeme předpokládat populaci, ve které jedinci jsou předprogramováni hrát určitou čistou strategii. Vektor $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ je interpretován jako stav populace v čase *t*, kde $x_i(t)$ znamená frekvenci, s jakou jedinci vybírají strategii s_i z dostupné množiny strategií S v čase t. V každém časovém okamžiku $t = 1, 2, ..., \infty$ se hráči náhodně párují a vstupují do hry, která je symetrická s výplatní maticí A. Výplata je definována jako zdatnost měřená počtem potomků v dostatečně velké, asexuální populaci, kde potomek zdědí strategii svého rodiče. Složení populace v takto definované hře je určena replikátorem dynamiky a podíl jedinců v populaci volící určitou strategii se zvyšuje rychlostí, která je dána rozdílem mezi průměrnou výplatou dané strategie a průměrnou výplatou celé populace.

2.2 Základní analytické nástroje a koncepty

Začněme několika definicemi, které budou za potřebí pro analýzu populační dynamiky.

Za *dynamický systém* budeme považovat systém, jehož stav lze popsat konečnou množinou stavových proměnných, přičemž okamžitý stav systému plně určuje jeho vývoj (tj. určuje další hodnoty stavových proměnných v každém čase – přítomnosti i minulosti). Hodnoty všech stavových proměnných v daném čase popisují stav systému, který lze znázornit bodem v tzv. *fázovém prostoru*.

Je-li x vektor stavových proměnných ve fázovém prostoru $R^n : x = (x_1, ..., x_n)$, nazveme *modelem dynamického systému* soustavu diferenciálních rovnic

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

kde $\dot{x}$ značí derivaci v čase t a f je vektorová funkce, která má spojité parciální derivace. Soustavu (2.1) můžeme rozepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, ..., x_n) \\ &\cdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Jejím řešením je vektor funkcí $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$.

Některé stavy systému mohou být konstantní, tj. existuje řešení $x(t)$ takové, že $x(t) = x^0$ pro každé t. Odpovídající body fázového prostoru se pak nazývají *pevnými* (také *kritickými* nebo *stacionárními) body* a pro ně platí $f(x) = 0$.

Pokud se dynamický systém nachází v čase t_0 v bodě x^0, pak množinu bodů, skrz které systém prochází, nazýváme *trajektorií postupující v čase vpřed* pro $t \to \infty$ a *trajektorií postupující v čase zpět* pro $t \to -\infty$. Trajektorie postupující v čase vpřed a zpět se dohromady nazývají trajektorie skrz x^0. Speciálním případem trajektorie je *uzavřená orbita*, tj. taková trajektorie, která konverguje ke stejnému bodu fázového prostoru, jako ze kterého startuje.

Okolím $M(x, \varepsilon)$ bodu x o poloměru r fázového prostoru nazýváme množinu bodů definovanou vztahem $\{x : |x - \varepsilon| < r\}$ (okolí je tedy n-rozměrná koule).

Stacionární bod nazýváme *stabilním*, jestliže ke každému okolí N tohoto bodu existuje okolí $M \subseteq N$ takové, že všechny trajektorie, které ním procházejí, zůstávají v okolí N při rostoucím času. Stacionární bod, který není stabilní se nazývá *nestabilní*.

Stacionární bod se nazývá *asymptoticky stabilní*, pokud je stabilní a existuje jeho okolí takové, že každá trajektorie procházející tímto okolím se blíží k uvedenému stacionárnímu bodu při rostoucím času.

Stabilní bod, který není asymptoticky stabilní, se nazývá *neutrálně stabilní*.

Je-li x stabilní, znamená to, že zvolíme-li ε dostatečně blízko x, pak trajektorie startující z bodů v okolí $M(x, \varepsilon)$ se nebude příliš vzdalovat od x. Je-li x navíc asymptoticky stabilní, pak se tyto trajektorie blíží k x pro t jdoucí k nekonečnu. Množina bodů $x^0 \in R^n$, jejichž trajektorie se blíží k x při rostoucím času se nazývá *oblastí přitažlivosti* (basin of attraction) stacionárního bodu x. Pokud každý bod definičního oboru rovnic (2.1) leží v oblasti přitažlivosti bodu x, řekneme, že stacionární bod x je *globálně stabilní*.

Řekneme, že x je

evoluční rovnováhou, pokud je asymptoticky stabilním stacionárním bodem dynamického systému,

evolučním ohniskem, pokud je neutrálně stabilním stacionárním bodem dynamického systému.

Dynamická analýza nám tedy dává na výběr bohatší možnosti než jen evoluční rovnováhu, neboť i rovnováha, která není evoluční, pokud je ohniskem, může být užitečná. A to z důvodu, že evoluční ohnisko poskytuje informace, v jakém rozmezí se bude výsledek nacházet v dlouhém období.

2.2.1 Replikátor dynamiky

Mějme evoluční hru kde každý jedinec velké populace volí jednu z n čistých strategií $s_i \in S$, i = 1, ..., n. Hra se opakuje v každém časovém okamžiku $t = 1, 2, ..., \infty$. Nechť $x_i(t)$ představuje podíl populace volící strategii s_i v čase t, pak hodnota výplaty strategie s_i bude:

$$\pi(x_i(t)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i(t),$$

kde $x = (x_1, ..., x_n)$. Dále očíslujme strategie tak, aby platilo $\pi(x_1(t)) \leq ... \leq \pi(x_n(t))$.[11]

Nyní zavedeme nejpoužívanější typ populační dynamiky, tzv. *replikátor dynamiky,* který reflektuje myšlenku Darwinovské selekce. Předpokládejme, že v každém časovém okamžiku $dt \in (0,1]$ každý jedinec s pravděpodobností $\alpha dt > 0$ učí svoji strategii jiného náhodně vybraného jedince se strategií s nižší výplatou, a přebírá strategii jiného náhodně vybraného hráče v případě, že strategie tohoto hráče má vyšší výplatu. Dále řekněme, že čím větší bude tento rozdíl, tím vyšší bude pravděpodobnost, že si toho daný jedinec všimne a změní svoji strategii. Důvod, proč přechod není jistý, může spočívat např. v nedokonalé informaci hráče o rozdílu očekávaných výplat či v jakékoliv bariéře, vedoucí ke zvýhodnění současné strategie (sklon ke konzervatismu, ke statutu quo).

Definujme pravděpodobnost $x_{ij}(t)$, že jedinec používající strategii s_i přejde ke strategii s_j následovně:

$$x_{ij}(t) = \begin{cases} \beta(\pi(x_j(t)) - \pi(x_i(t))) & \text{pro } \pi(x_j(t)) > \pi(x_i(t)) \\ 0 & \text{pro } \pi(x_j(t)) \leq \pi(x_j(t)) \end{cases}$$

kde β je dostatečně malé, aby $x_{ij}(t) \leq 1$ pro všechna i, j. Očekávaná hodnota podílu populace používající strategii s_i v čase $t + dt$ bude dána počátečním podílem populace, odlivem populace a přílivem populace:

$$\begin{aligned} Ex_i(t+dt) &= x_i(t) - \alpha dt \sum_{j=i+1}^{n} x_j(t) \beta \left[\pi(x_j(t)) - \pi(x_i(t)) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \alpha dt x_j(t) x_i(t) \beta \left[\pi(x_i(t)) - \pi(x_j(t)) \right] \\ &= x_i(t) + \alpha dt x_i(t) \sum_{j=1}^{n} x_j(t) \beta \left[\pi(x_i(t)) - \pi(x_j(t)) \right] \\ &= x_i(t) + \alpha dt x_i(t) \beta \left[\pi(x_i(t)) - \bar{\pi}(x(t)) \right] \end{aligned}$$

---

[11] Vzhledem k tomu, že se výplaty jednotlivých strategií mění v čase, každé periodě odpovídá jiná posloupnost očíslovaných strategií.

kde $\overline{\pi}(x(t)) = \pi(x_1(t))x_1(t) + ... + \pi(x_n(t))x_n(t) = (x(t))^T Ax(t)$ je průměrná výplata celé populace. Pro dostatečně velkou populaci můžeme nahradit $Ex_i(t+dt)$ veličinou $x_i(t+dt)$. Vytknutím $x_i(t)$ z obou stran, vydělením dt a zlimitováním výrazu pro $dt \to 0$ dostaneme

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = \frac{1}{x_i(t)} \lim_{dt \to 0} \frac{\alpha dt \beta \left[\pi(x_i(t)) - \overline{\pi}(x(t))\right]}{dt}$$

$$\dot{x}_i(t) = \alpha\beta x_i(t)\left[\pi(x_i(t)) - \overline{\pi}(x(t))\right] = \alpha\beta x_i(t)\left[\sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i(t) - (x(t))^T Ax(t)\right] \qquad (2.2)$$

$$t \geq 0,\ j = 1, ..., n.$$

Vztah (2.2) se nazývá *replikátor dynamiky* v čase.[12] Protože konstantní faktor $\alpha\beta$ nemá vliv na stabilitu ani na tvar trajektorií dynamického systému, obvykle se předpokládá, že $\alpha\beta = 1$.

Na základě teorie diferenciálních počtů soustava replikátorů dynamiky (2.2) má jediné řešení $x(t, x^0)$, $t \geq 0$ pro jakýkoliv počáteční bod $x^0 = x(0)$. Navíc snadno zjistíme, že $\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i(t) = 0$, tj. objem populace je stálý v čase. Proto, pokud se strategie s_j vyskytuje v populaci v počátečním čase t_0 s nulovou pravděpodobností, pak se nemůže objevit v populaci v žádném následujícím časovém okamžiku $t' > t_0$. Z toho vyplývá, že replikátor dynamiky (2.2) nepředpokládá v systému inovace ani mutace. Nicméně, tato vlastnost replikátoru dynamiky nevylučuje možnost, že $x_i(t)$ může konvergovat k nule pro t jdoucí k nekonečnu, tj. může se stát, že trajektorie začínající uvnitř množiny strategií S bude směřovat k její hranici.

Zmiňme se ještě o několika vlastnostech replikátoru dynamiky (2.2). Za prvé, četnost výskytu dané strategie se zvýší pouze pokud její výplata převyšuje průměrnou výplatu populace. Znamená to, že replikátor dynamiky v tomto případě nepředstavuje dynamiku optimálních reakcí, neboť hráči si nevybírají strategie, které jsou optimálními reakcemi na celkovou distribuci pravděpodobností výskytu strategií v populaci v předcházejícím období. To je evidentní z toho, že (i) jsou párování náhodně a (ii) přebírají lepší strategie jen z části, dle koeficientu β.

[12] Čas je u takto definovaného replikátoru dynamiky měřený jako spojitá veličina.

Za druhé, mějme matici $Df(x) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, která reprezentuje výplaty hráče *i*, při střetu s hráčem *j*, kde *i*, *j* = 1, ..., *n*, pak každá matice $A' = (a_{ij}')_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ taková, že ke každému *i* = 1, ..., *n* existuje takové h_j, pro které platí

$$a_{ij}' = a_{ij} + h_j \, ,$$

má stejné trajektorie replikátoru dynamiky a tudíž i stejné dynamické vlastnosti systému jako matice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Jinak řečeno, jsou-li všichni hráči *i* zvýhodněni při interakci s hráčem *j* o stejnou míru, nemění se dynamika systému.

Za třetí, pro 1 ≤ *i* < *j* ≤ *n* platí

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)\left[\pi(x_i) - \pi(x_j)\right].$$ [13]

Poslední dvě vlastnosti ukazují, že v případě replikátoru dynamiky jsou důležité pouze *relativní* výše hodnot výplat, tzn. z hlediska vývoje populace v čase bude strategie s vyšší hodnotou výplaty relativně růst vůči strategii s nižší výplatou.

2.2.2 Replikátor dynamiky a rovnováha

Stejně jako v případě statické analýzy, i v této části se budeme zabývat vztahem replikátoru dynamiky a rovnovážných konceptů, kde opět potvrdíme důležitost Nashovy rovnováhy jako klíčového konceptu teorie her. Nadále budeme uvažovat velkou populaci hráčů, předprogramovaných na hraní čisté strategie s_i, *i* = 1, ..., n. Budeme nadále uvažovat náhodnost párování a symetričnost hry.

Smíšená strategie $x^* = x_1^* s_1 + \ldots + x_n^* s_n, \sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1$, která je Nashovou rovnováhou monomorfní populace (tj. všichni členové populace volí x^*), je *asymptoticky stabilní* pro polymorfní populaci (kde x_i^* představuje podíl populace volící čistou strategii s_i),

[13] Při odvození této vlastnosti jsme postupovali následovně:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \frac{\frac{dx_i}{dt}x_j - x_i\frac{dx_j}{dt}}{x_j^2} = \frac{\dot{x}_i}{x_j} - \frac{\dot{x}_j}{x_j}\frac{x_i}{x_j} = \frac{x_j}{x_i}\left(\frac{\dot{x}_i}{x_i} - \frac{\dot{x}_j}{x_j}\right) = \pi(x_i) - \pi(x_j)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{x_i}{x_j}\right) = \frac{x_j}{x_i}\left[\pi(x_i) - \pi(x_j)\right]$$

pokud existuje takové okolí bodu x^*, $M(x^*, \varepsilon)$, pro které platí, že jakákoliv trajektorie replikátoru dynamiky startující z $x^0 \in M(x^*, \varepsilon)$ konverguje k x^*. Přesněji:

Nechť x^* je symetrickou Nashovou rovnováhou hry. Pak x^* je stacionárním bodem replikátoru dynamiky, tj. $\dot{x}_i = 0$, $i = 1, ..., n.$.

Nechť x^* je evoluční rovnováhou nebo evolučním ohniskem replikátoru dynamiky. Pak x^* je Nashovou rovnováhou.

Opačná implikace tvrzení (i) nemusí vždy platit. Ne každý stacionární bod replikátoru dynamiky je Nashovou rovnováhou. Například, pokud se strategie s_j nevyskytuje v populaci v čase t, pak se ani nikdy neobjeví v budoucnu. Proto každá strategie s_i taková, pro kterou platí, že podíl populace volící s_i v čase t je $x_i = 1$, je stacionárním bodem replikátoru dynamiky, přitom ani nemusí být Nashovou rovnováhou.

Asymptoticky stabilní stacionární body replikátoru dynamiky určují takové Nashovy rovnováhy, které jsou stabilní v čase. V mnoha případech evoluční dynamika dokonce vybírá mezi více Nashovými rovnováhami na základě dvou klíčových znaků: konvergence a stability. V tomto smyslu tedy asymptotická stabilita představuje zjemnění Nashovy rovnováhy.

Na závěr můžeme uvést vztah mezi asymptotickou stabilitou evolučního systému (resp. evoluční rovnováhy) a evolučně stabilní strategií (Taylor, Jonker 1978)[14]:

Jestliže σ^* je evolučně stabilní strategií, pak populační stav $x^* = \sigma^*$ je evoluční rovnováhou replikátoru dynamiky. Pokud σ^* přisuzuje všem čistým strategiím, které mají hráči k dispozici, pozitivní pravděpodobnost, pak $x^* = \sigma^*$ je globálně stabilním stacionárním bodem replikátoru dynamiky.

Jinými slovy, pro každou evolučně stabilní strategii existuje takové okolí, že jakákoliv trajektorie replikátoru dynamiky startující z tohoto okolí vždy konverguje k ESS. Opačná implikace opět neplatí. Obecně, ne každá trajektorie replikátoru dynamiky musí konvergovat k nějakému konečnému bodu *x* pro *t* jdoucí k nekonečnu, ale může mít dráhu v podobě cyklu pohybující se v množině *S* nebo směřovat do nekonečna. To je významné zjištění oproti pouhé evoluční stabilitě.

[14] Citováno podle: Gintis (2000, str. 202), Vega-Redondo (2003, str. 369).

Protože každá evolučně stabilní strategie je zároveň evoluční rovnováhou, představuje koncept ESS větší zjemnění Nashovy rovnováhy než koncept evoluční rovnováhy.

2.3 Ilustrativní příklad

2.3.1 Replikátor dynamiky v symetrické bimaticové hře typu 2x2

Uvažujme velkou populaci hráčů, kteří se v každém časovém okamžiku náhodně párují a vstupují do symetrické strategické hry s následující výplatní maticí:

Tabulka 2.1: Bimaticová hra G typu 2x2

	A	*B*
A	a_{11}, a_{11}	a_{12}, a_{21}
B	a_{21}, a_{12}	a_{22}, a_{22}

Zdroj: Friedman(1998)

Každý hráč má k dispozici stejnou množinu čistých strategií $S = \{A, B\}$ a stav populace v čase t je $x(t) = xA + (1-x)B \equiv (x, 1-x)$, kde $x \in [0,1]$ představuje podíl populace volící čistou strategii A v čase t. Replikátor dynamiky odpovídající stavu populace $x(t)$ bude:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\left[\pi(A, xA+(1-x)B) - \pi(xA+(1-x)B, xA+(1-x)B)\right] \\ &= x\left[a_{11}x + a_{12}(1-x) - a_{11}x^2 - a_{12}x(1-x) - a_{21}(1-x)x - a_{22}(1-x)^2\right] \\ &= x\left[a_{11}x(1-x) + a_{12}(1-x)^2 - a_{21}x(1-x) - a_{22}(1-x)^2\right] \\ &= x(1-x)\left[a_2 x - a_1(1-x)\right],\end{aligned} \tag{2.3}$$

kde $a_1 = a_{22} - a_{12}$, $a_2 = a_{11} - a_{21}$.

Ke zkoumání evoluční dynamiky systému (2.3) využijeme *linearizační teorém*, který je užitečným nástrojem při určování evoluční rovnováhy. Nechť x^* je stacionární bod dynamického systému $\dot{x} = f(x)$ a nechť matice $J = Df(x)$ je Jakobián[15] systému

[15] Jakobián dynamického systému $\dot{x} = f(x)$ v bodě $x \in R^n$ je čtvercová matice typu $n \times n$ $Df(x) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, pro kterou platí:

$$(a_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) \qquad \text{pro } i, j = 1, \dots, n$$

v bodě x^*. Pak definujeme *linearizaci* původního dynamického systému v bodě x^* jako lineární dynamický systém

$$\dot{x} = Jx,$$

který má jednotlivé složky ve tvaru

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\ldots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n.
\end{aligned}$$

Linearizační teorém zní následovně:

Nechť dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ je hyperbolický[16] ve stacionárním bodě x^*. Pak x^* je asymptoticky stabilní, pokud jeho linearizace je asymptoticky stabilní a nestabilní, pokud jeho linearizace je nestabilní. Jako částečnou obrácenou implikaci platí, že pokud je x^* stabilní, pak žádné vlastní číslo Jakobiánu Df(x) nemá ostře kladnou reálnou část.

Vraťme se nyní zpět k naší bimaticové hře. Snadno zjistíme, že systém (2.3) má tři stacionární body $\left\{0, 1, \frac{a_1}{a_1 + a_2}\right\}$.[17] Jakobián odpovídající jednotlivým stacionárním bodům dynamického systému bude:

$$Df(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = a_2 x(2 - 3x) + a_1(1 - x)(3x - 1)\Big|_{(0)} = -a_1$$

$$Df(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1) = a_2 x(2 - 3x) + a_1(1 - x)(3x - 1)\Big|_{(1)} = -a_2$$

$$Df\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right) = a_2 x(2 - 3x) + a_1(1 - x)(3x - 1)\Big|_{\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}$$

a odpovídající vlastní čísla jsou

---

[16] Dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ je hyperbolický ve stacionárním bodě x^*, právě tehdy když žádné vlastní číslo Jakobiánu $Df(x)$ nemá ostře kladnou reálnou část.

[17] Z definice stacionárního bodu v části 2.2 tyto body získáme vyřešením rovnice:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow x(1 - x)\left[a_2 x - a_1(1 - x)\right] = 0.$$

$$\lambda_{Df(0)} = -a_1$$
$$\lambda_{Df(1)} = -a_2$$
$$\lambda_{Df\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Protože platí, že Nashova rovnováha bimaticové hry se nezmění, přidáme – li libovolnou konstantu k výplatám jednoho hráče v reakci na strategie druhého hráče, můžeme při zkoumání evoluční stability rozdělit hru s výplatní maticí v tabulce 2.1 na následující případy:

1. $a_2 < 0 < a_1$. Strategie *B* striktně dominuje strategii *A* a je jedinou Nashovou rovnováhou symetrické hry. Vlastní čísla Jakobiánů v jednotlivých stacionárních bodech mají pouze reálnou část (předpokládáme, že hodnoty výplat hráčů jsou reálná čísla) se znaménky:
$$\lambda_{Df(0)} = -a_1 < 0$$
$$\lambda_{Df(1)} = -a_2 > 0$$
$$\lambda_{Df\left(\frac{a_1}{a_1+a_2}\right)} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} > 0.$$
Pro tento případ je hra asymptoticky stabilní pouze pro stacionární bod $x^* = 0$, tj. jediná Nashova rovnováha (B, B) je zároveň evoluční rovnováhou bimaticové hry *G*. Protože se jedná o striktní Nashovu rovnováhu, je *B* i evolučně stabilní strategií. Pokud navíc platí, že $a_{22} < a_{11}$ (a $a_{21} > a_{12}$), dostáváme známou hru typu vězňova dilematu a Nashova rovnováha přinese oběma hráčům neoptimální výplatu a_{22}. V tomto případě tedy replikátor dynamiky nepovede k nejefektivnějšímu stabilnímu stavu. Situace, kdy $a_1 < 0 < a_2$ je obdobná pouze s tím rozdílem, že v tomto případě bude strategie *A* dominantní.
2. $a_1 > 0, a_2 > 0$. Tento typ hry je známý jako koordinační hra, která má 3 symetrické rovnovážné strategie, z nichž jsou dvě čisté strategie *A* a *B* a jedna smíšená strategie $x^* = \frac{a_1}{a_1 + a_2} A + \frac{a_2}{a_1 + a_2} B$. Podíváme-li se na znaménka vlastních čísel Jakobiánů, pak pouze stacionární body odpovídající čistým strategiím *A* a *B* jsou asymptoticky stabilní, replikátor dynamiky konverguje ke strategii *A* (resp. *B*) pokud podíl populace volící čistou strategii v čase nula je

větší (resp. menší) než $\frac{a_1}{a_1+a_2}$. Kromě toho jsou obě čisté strategie evolučně stabilními strategiemi.

3. $a_1 < 0, a_2 < 0$. Příkladem tohoto typu může být hra jestřáb vs. hrdlička s výplatní maticí, která předpokládá, že energetická ztráta ze zranění je větší než hodnota zdroje (tj. $V < C$, viz. 1.3.1). Hra má v tomto případě pouze jedinou smíšenou strategii $x^* = \frac{a_1}{a_1+a_2}A + \frac{a_2}{a_1+a_2}B$, která je zároveň evolučně stabilní strategií. Protože platí, že každá strategie, která je ESS, je zároveň evoluční rovnováhou a znaménka vlastních čísel Jakobiánů ve stacionárních bodech tento závěr také potvrzují, replikátor dynamiky bude konvergovat k populačnímu stavu odpovídající této smíšené strategii pro jakýkoliv počáteční populační stav, ve kterém jsou podíly populace volící čisté strategie nenulové.

Na základě těchto výsledků je vidět, že replikátor dynamiky pro symetrickou bimaticovou hru typu 2x2 vždy konverguje k evoluční rovnováze, která je zároveň ESS pro jakýkoliv počáteční bod ležící uvnitř strategického prostoru *S*.[18]

2.4 Závěr

Analýza evolučně dynamického modelu v této části byla založena na soustavě diferenciálních rovnic, které určují pravděpodobnostní distribuci dostupných strategií v populaci. Motivací, skrývající se za tímto přístupem, je myšlenka, že chování jednotlivců v populaci je komplexním a stochastickým procesem, avšak principy typu zákona velkých čísel pravděpodobně zajistí, že se ve velké populaci různé formy chování zprůměrují do takové podoby, která má deterministický charakter.

Protože replikátor dynamiky, který byl původně objevený pro účely evoluční biologie, nemusí vždy splňovat atributy zkoumaných ekonomických situací, většina teoretiků ve svých pracích používá obecněji definované dynamické systémy, splňující pouze podmínku monotonie (monotonicity condition). Tato podmínka vyžaduje, aby se četnost výskytu strategie s vyšší výplatou v populaci zvyšovala rychleji než četnost výskytu strategie s nižší výplatou; což lze interpretovat tak, že v průměru jsou hráči schopni přejít od horší strategie k lepší.

[18] S výjimkou případu, kdy $a_1 = a_2 = 0$. Tento případ je však pro naši analýzu irelevantní, neboť postrádá jakýkoliv strategický aspekt a hráči jsou indiferentní mezi čistými strategiemi *A* a *B*.

Jinou z možností je vybudovat evoluční modely na základě explicitní specifikaci chování hráčů, kde autoři pracují přímo s rozmanitostmi v chování jedinců, raději než s vyhlazením těchto odchylek v podobě agregátní dynamiky. Například Kandori, Mailath a Rob (1993) modelují populaci, kde s vysokou pravděpodobností každý hráč zvolí strategii, která je optimální reakcí na pravděpodobnostní distribuci strategií v populaci v předcházejícím období a s malou pravděpodobností zvolí jinou, náhodně vybranou strategii (tzv. mutantská strategie). Výsledkem je stochastický proces, kde stavový prostor je souhrnem specifikací, na základě kterých hráči volí tu či onu strategii.

V ekonomii při práci s dynamickými modely, ať už z deterministického či stochastického hlediska, teoretici většinou předpokládají omezenou racionalitu hráčů, využívajících zkušeností z minulosti. Tato vlastnost se označuje jako schopnost učení, imitace a adaptace hráčů na základě chování ostatních hráčů v čase. Evoluční dynamiku lze proto uplatnit především na trzích, kde předpokládáme nutnost učení a neustálé adaptace.

3

Evoluční stabilita v asymetrických hrách

3.1 Úvod

Při aplikaci evolučních her ve společenských vědách často narážíme na problém, že podmínka jediné symetrické populace a náhodnosti párování hráčů není splněná. A to z důvodu, že v mnoha ekonomických situacích chceme zkoumat interakce mezi více jedinci jedné populace nebo mezi jedinci různých populací.

Průkopníkem myšlenky aplikovat koncepty evoluční teorie her na tyto situace je opět Maynard Smith, tentokrát s Parkerem, kteří ve své práci *The Logic of Asymmetric Contests* z roku 1976 zkoumali asymetrický konflikt dvou jedinců s odlišnými rolemi (např. samec vs. samička, vlastník vs. vetřelec). Klíčovým prvkem jejich práce byla symetrizace původní asymetrické hry tím způsobem, že definovali čisté strategie jedinců jako behaviorální pravidla podmíněná rolí, kterou by každý hráč mohl mít. Na takto definovanou hru, která byla již symetrická, mohli opět aplikovat klasicky definovaný koncept ESS.

Ačkoliv existuje několik typů vzájemných interakcí mezi jedinci jedné či více populací, v našem případě se omezíme pouze na případ *asymetrických evolučních her*, tj. na situaci dvou populací, kde v každém časovém okamžiku náhodně vybraný jedinec z jedné populace se střetne s jiným náhodně vybraným jedincem druhé populace. Narozdíl od Maynarda Smitha a Parkera nebudeme však provádět symetrizaci hry, nýbrž dovolíme přítomnost asymetrických mutantských strategií.

Asymetrické hry bývají často využívány při modelování situací se dvěma ekonomicky odlišnými rolemi a obvykle se předpokládá, že se můžou střetnout pouze hráči různých populací a nikoliv hráči stejné populace. Nicméně je třeba poznamenat, že takto definované asymetrické hry vylučují populační efekt, který může být důležitý při aplikacích s více než dvěma populacemi. Například v modelu mezinárodního obchodu dvou ekonomik firmy domácí ekonomiky soutěží na trhu zboží nejen se zahraničními, ale také s jinými domácími firmami. Výplata firem pak závisí na populačním stavu jak zahraniční, tak domácí ekonomiky.

3.2 Evoluční stabilita a rovnováha

3.2.1 Základní teoretický rámec

Mějme dvě populace P^1 a P^2, kde v každém časovém okamžiku náhodně vybraný jedinec populace P^1 se střetne s jiným náhodně vybraným jedincem populace P^2 v bimaticové hře s výplatními maticemi $A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ a $B = (\beta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$. Hráči populace P^1 mají k dispozici množinu čistých strategií $S = \{s_1, ..., s_n\}$, hráči z populace P^2 množinu $T = \{t_1, ..., t_m\}$. Pokud hráč z populace P^1 zvolí strategii s_i, zatímco hráč z populace P^2 zvolí strategii t_j, pak výplata hráče z P^1 bude α_{ij} a výplata hráče z populace P^2 bude β_{ij}.

Nechť $q = (q_1, ..., q_m)$ představuje stav populace P^2, kde q_j je podíl této populace, která volí čistou strategii t_j. Pak očekávaná výplata hráče populace P^1 volící čistou strategii s_i bude:

$$\alpha(s_i, q) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} q_j .$$

Obdobně, nechť $p = (p_1, ..., p_n)$ představuje stav populace P^1, kde p_i je podíl této populace, která volí ryzí strategii s_i, pak výplata hráče populace P^2 volící ryzí strategii t_j bude

$$\beta(p, t_j) = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_{ij} .$$

Strategie $s_i \in S$ je *optimální reakcí* na q, pokud $\alpha(s_i, q) \geq \alpha(s_k, q)$ pro všechna $s_k \in S$, strategie $t_j \in T$ je *optimální reakcí* na p, pokud $\beta(p, t_j) \geq \beta(p, t_l)$ pro všechna $t_l \in T$. *Nashova rovnováha* v asymetrické evoluční hře je dvojice $p^* = (p_1^*, ..., p_i^*, ..., p_n^*)$ a $q^* = (q_1^*, ..., q_j^*, ..., q_n^*)$ taková, že pro všechna $s_i \in S$ platí, že pokud $p_i^* > 0$, pak s_i je optimální reakcí na q^* a pro všechna $t_j \in T$ platí, že pokud $q_j^* > 0$, pak t_j je optimální reakcí na p^*.

3.2.2 Evolučně stabilní dvojice strategií

Stejně jako v symetrické bimaticové hře jedné populace, i v případě asymetrické hry je strategie evolučně stabilní, právě tehdy když je Nashovou rovnováhou, která je imunní vůči invazi dostatečně malého množství mutantských strategií v jedné či obou populacích.

Předpokládejme, že členové populace P^1 a P^2 následují dvojici (smíšených) strategií (p^*, q^*), která je Nashovou rovnováhou. Dále uvažujme, že se v populaci P^1 objeví skupina jedinců volící mutantskou strategii $x \in S$. Připomeňme si, že v případě jedné monomorfní populace je Nashova strategie p^* stabilní (imunní) vůči mutantské strategii x, pokud výplata p^* při střetu s x je vyšší než výplata x při střetu s jiným mutantem x. Avšak v případě dvou populací mutant x z populace P^1 se může střetnout pouze s mutantem z populace P^2 a nikoliv s mutantem stejné populace. Podmínka stability se stává v tomto případě zbytečnou a pro zajištění evoluční stability musí dvojice Nashových rovnováh splnit přísnější podmínku. A to takovou, že jedinec volící Nashovsky rovnovážnou strategii v jedné populaci musí mít vyšší výplatu při střetu s jakýmkoliv jedincem druhé populace než výplata jedince volícího mutantskou strategii také při střetu s jakýmkoliv jedincem druhé populace (Selten 1980)[19]:

(p^*, q^*) je evolučně stabilní dvojicí strategií asymetrické bimaticové hry G = (A, B), pokud pro libovolnou dvojici strategií $(x^1, x^2) \in S \times T$ platí:

(i) $\alpha(p^*, q^*) > \alpha(x^1, q^*)$,

(ii) $\beta(p^*, q^*) > \beta(p^*, x^2)$.

Podmínka evoluční stability zde vyžaduje, aby strategie byli odolné nejen vůči soupeřům z vlastní populace, ale zároveň i vůči případu, kdy se objeví mutant v druhé populaci. Pouhá Nashova rovnováha totiž udává, že mutant v druhé populaci nezíská více než rovnovážná strategie v druhé populaci, evoluční stabilita ale navíc požaduje, že když se takový mutant objeví, tak nepoškodí ani rovnovážnou strategii v první populaci – tj. hrají se nejenom optimální reakce, jako ostatně v rovnováze vždycky, ale musí být zároveň takové, že nepoškodí druhého.

Nashova rovnováha splňující podmínky evoluční stability v případě asymetrických her je v klasické teorii her známá jako striktní Nashova rovnováha. Vzhledem k tomu,

[19] Citováno podle: van der Laan, Tieman (1996, str. 19).

že žádná smíšená Nashova strategie nemůže být striktní[20], ani *žádná evolučně stabilní dvojice strategií v asymetrické hře nemůže být smíšená*.

3.2.3 Evoluční rovnováha

Existuje několik způsobů zobecnění *replikátoru dynamiky* jedné populace pro více populací. Uvedeme si nejpoužívanější z nich, navrhnutý Taylorem (1979)[21], který má podobu $n + m - 2$ rovnic

$$\dot{p}_i = p_i(\alpha(s_i, q) - \alpha(p, q))$$
$$\dot{q}_j = q_j(\beta(p, t_j) - \beta(p, q)),$$

kde $\alpha(p,q) = \sum_i p_i \alpha_i(q),\ i = 1, ..., n-1$ je průměrná výplata populace P^1 a $\beta(p,q) = \sum_j q_j \beta_j(p), j$ = 1, ..., m - 1 je průměrná výplata populace P^2.

Vzhledem k tomu, že tento replikátor dynamiky je přímo odvozen od replikátoru dynamiky pro jednu populaci, jeho vlastnosti zůstávají podobné jako v případě jedné populace: pouze strategie, které zůstanou po postupné eliminaci striktně dominovaných strategií, se objeví v replikátoru dynamiky. Vztah mezi Nashovou rovnováhou a replikátorem dynamiky zůstává také stejný: Nashova rovnováha evoluční hry je stacionárním bodem replikátoru dynamiky a každá evoluční rovnováha nebo evoluční ohnisko dynamiky je Nashovou rovnováhou. Dokonce i zde je každá evolučně stabilní strategie evoluční rovnováhou replikátoru dynamiky.

---

[20] Zde jsme vycházeli z poznatku, že je-li smíšená strategie $\sigma^* = p_1\sigma_1^* + ... + p_n\sigma_n^*$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ Nashovou rovnováhou, pak každá libovolná jiná strategie $\sigma = q_1\sigma_1^* + ... + q_n\sigma_n^*$, $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ je také optimální reakcí na σ^*, tj.

$$\pi(\sigma^*, \sigma^*) = \pi(\sigma, \sigma^*)\ .$$

Na druhé straně pro striktní Nashovu rovnováhu platí:

$$\pi(\tau^*, \tau^*) > \pi(\tau, \tau^*)\,,$$

což neplatí v případě smíšené Nashovy rovnováhy a proto žádná smíšená strategie, která je Nashovou rovnováhou, nemůže být striktní.

[21] Citováno podle: Gintis (2000, str. 211).

3.3 Ilustrativní příklad

3.3.1 Kupec vs. prodejce

V této hře budeme zkoumat interakce dvou odlišných populací, zvaných kupci a prodejci. Každý prodejce má k dispozici dvě strategie: být čestný (strategie *C*) nebo podvádět (strategie *P*) a každý kupec si také vybírá mezi dvěma strategiemi: provést inspekci (strategie *I*) nebo důvěřovat prodejci a inspekci neprovést (strategie *N*).

Členové obou populací se střetávají na neorganizovaném trhu (např. ojetých automobilů) a jejich účast je příležitostná, proto reputační efekt a tradice nehrají roli při určování výsledku. Dále budeme uvažovat náhodnost párování hráčů, kteří jsou rizikově neutrální. Výplata jednotlivých strategií bude záviset pouze na rozložení strategií v populacích (např. podvádění bude méně atraktivní pro prodejce, pokud více kupců bude provádět inspekci a naopak). Uvažujme, že odpovídající výplatní matice bude:

Tabulka 3.1: Kupec vs. prodejce

		Prodejce	
		C	*P*
Kupec	*I*	3,2	2,1
	N	4,3	1,4

Zdroj: Friedman (1991)

Označme *p* pravděpodobnost, že bude prodejce čestný (resp. *p* představuje podíl čestných prodejců v populaci prodejců) a *q* pravděpodobnost, že kupec provede inspekci (resp. *q* představuje podíl populace kupců, kteří provedou inspekci). Míry růstu *p* a *q*, dané replikátorem dynamiky, budou:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= p(\pi(I,\sigma) - p\pi(I,\sigma) - (1-p)\pi(N,\sigma)) \\
&= p(3q + 2(1-q) - 3pq - 2p(1-q) - 4(1-p)q - (1-p)(1-q)) \\
&= p(1-p)(1-2q) \\
\dot{q} &= q(\pi(C,\tau) - q\pi(C,\tau) - (1-q)\pi(P,\tau)) \\
&= q(2p + 3(1-p) - 2pq - 3(1-p)q - p(1-q) - 4(1-p)(1-q)) \\
&= q(1-q)(2p-1),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $\sigma = Cq + (1-q)P$, $\tau = Ip + N(1-p)$ jsou stavy populace kupců a prodejců v čase *t*.

Systém (3.1) má 5 stacionárních bodů:[22] (1,0), (0,1), (0,0), (1,1) a $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Hra nemá žádnou Nashovou rovnováhu v čistých strategiích. Má pouze jedinou Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích $(\tau,\sigma)=(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}N,\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}P)$, která odpovídá stacionárnímu bodu $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Abychom zjistili stabilitu stacionárních bodů, podívejme se na Jakobián systému (3.1):

$$Df(p,q)=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p}p(1-p)(1-2q) & \frac{\partial}{\partial q}p(1-p)(1-2q) \\ \frac{\partial}{\partial p}q(1-q)(2p-1) & \frac{\partial}{\partial q}q(1-q)(2p-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-2p)(1-2q) & -2p(1-q) \\ 2q(1-q) & (1-2q)(2p-1) \end{pmatrix}.$$

Jakobián odpovídající stacionárním rohovým bodům (*p*, *q* = 0 nebo 1) bude:

$$Df(p,q)=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla Jakobiánu v těchto stacionárních bodech jsou:[23]

$$\lambda_{1,2}=\pm 1$$

a tedy $\lambda_1<0<\lambda_2$. Platí-li však tento vztah mezi vlastními čísly Jakobiánu v odpovídajícím stacionárním bodě, pak tento stacionární bod je *sedlovým bodem* a je nestabilní. Z toho vyplývá, že stacionární body (0, 1), (1, 0), (0, 0) a (1, 1) jsou nestabilní a z evolučního hlediska pro nás nesignifikantní.

Jakobián ve stacionárním bodě $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ bude:

$$Df(p,q)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

---

[22] Z definice stacionárního bodu v části 2.2 tyto body získáme vyřešením soustavy

$$\dot{p}=0 \Rightarrow p(1-p)(1-2q)=0$$
$$\dot{q}=0 \Rightarrow q(1-q)(2p-1)=0.$$

[23] Při nalezení vlastních čísel Jakobiánu jsme využili faktu, že je-li λ vlastním číslem matice *A* typu $n\times n$, pak pro něj platí:

$$\det(A-\lambda I)=0,$$

kde *I* je jednotková matice typu $n\times n$ a det značí determinant.

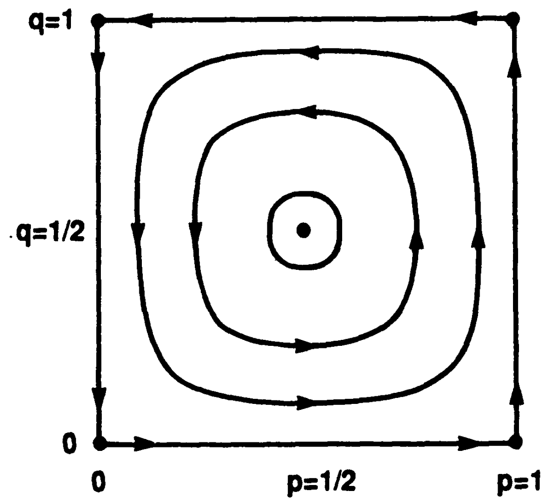
a odpovídající vlastní čísla jsou v tomto případě ryze imaginární:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{2}$$

Pokud Jakobián v určitém stacionárním bodě má vlastní čísla, která jsou ryze imaginární (tj. reálná složka těchto vlastních čísel je nulová), pak tento stacionární bod je neutrálně stabilní (tj. je evolučním ohniskem) a všechny trajektorie jsou uzavřenými orbity. Takový stacionární bod se nazývá *centrem*.[24]

Fázový diagram dynamického systému (3.1) vypadá následovně:

Obrázek 3.1: Trajektorie bimaticové hry ‚kupec' vs. ‚prodejce'



Zdroj: Friedman (1991)

Shrneme-li celou situaci, pak hra nemá žádnou evoluční rovnováhu, což potvrzuje poznatek z části 3.2, že žádná smíšená Nashova rovnováha nemůže být evoluční rovnováhou v asymetrické hře. Evoluční dynamika však ukázala, že hra má evoluční ohnisko v podobě smíšené Nashovy rovnováhy $(\tau, \sigma) = (\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}P)$. V dlouhém období se bude rovnovážný poměr čestných prodejců a důvěřujících kupců pohybovat v okolí tohoto ohniska (viz. fázový diagram na obr. 3.1).

3.4 Závěr

Pro symetrické hry jedné populace platí, že strategie, jež mají hráči k dispozici, nezávisí na jejich roli v populaci, neboť všichni členové populace sdílí roli stejnou.

[24] Citováno podle: Gintis (2000, str. 180).

Asymetrické hry, které odlišnost rolí naopak umožňují, mohou být velmi užitečné, neboť při modelování mnoha ekonomických situací hraje klíčovou roli právě odlišnost rolí. Maynard Smith a Parker dokonce ukázali, že i nepatrná asymetrie mezi hráči může radikálně změnit výsledné evolučně stabilní strategie odpovídajícího konfliktu.[25]

Při aplikaci rovnovážných konceptů evoluční teorie her na asymetrické hry však narážíme na problém, že Nashovsky rovnovážné smíšené strategie nemohou být evolučně stabilní. Protože každá evolučně stabilní strategie je asymptoticky stabilní v rámci dynamiky, ani žádná smíšená strategie, která je Nashovou rovnováhou, nemůže tvořit evoluční rovnováhu systému v dlouhém období.

Na jedné straně řada autorů považuje tuto skutečnost za vážnou slabinu evoluční teorie her, neboť ve většině případech hry nemívají Nashovy rovnováhy v čistých strategiích a tudíž pro ně neexistuje evolučně stabilní stav (Mailath 1998, van der Laan, Tieman 1996). Dle jiných však tato skutečnost reflektuje důležitou zákonitost sociálních interakcí – v asymetrických evolučních hrách se četnost výskytu různých vzorců chování pohybuje v periodických cyklech v průběhu času (Gintis 2000).

[25] Citováno podle: Eshel (2005, str. 2).

4

Vybrané aplikace evoluční teorie her

V této části se na dvou aplikacích pokusíme ukázat, jakým způsobem lze využít koncepty a nástroje evoluční teorie her k analýze některých problematik soudobé ekonomie.

V prvním modelu se budeme zabývat prací d'Artiguese a Vignola (2003), kteří vysvětlují výskyt současných forem terorismu za pomoci evoluční teorie her. Jejich model představuje ekonomickou interpretaci teorie *mimetické rivality* Reného Girarda, že terorismus je výsledkem hospodářské soutěže mezi zeměmi, kdy přání imitovat vedoucí zemi je zmařen nemožností to udělat a vynucená výsledná volba může dokonce zhoršit situaci vedoucí země. Mimetická rivalita je tedy situace, kdy díky frustraci volíme takové strategie, které zhorší pozici protihráče. Chování jednotlivých zemí se řídí pravidlem *uspokojení*, podle kterého se každá země snaží snížit propast mezi maximální realizovanou výplatou vedoucí země a vlastní výplatou. Na základě analýzy koordinační hry mezinárodního obchodu *n* hráčů (zemí) ukázali, že přání konvergovat může paradoxně vést k mnohem rozdělenější světové ekonomice.

Druhá aplikace interpretuje model majetkové kriminality Cressmana, Morrisona a Wena (1998). Za použití evoluční dynamiky modelují prostředí, ve kterém jsou motivace (potenciálních) delikventů spáchat zločin ovlivněny exogenně determinovanou mírou veřejné policejní kontroly a výší trestu. Klíčový element jejich analýzy představuje míra osobní ochrany majetku, která může nepřímo záviset na výše uvedených faktorech. Analýzou dynamiky Cressman, Morrison a Wen došli k závěru, že míra majetkové kriminality je cyklická v čase a průměrná míra majetkové kriminality je dokonce invariantní vůči výše trestu za spáchání zločinu. Co se týče míry policejní aktivity, její mezní růst do určité prahové hodnoty překvapivě zvyšuje průměrnou míru kriminality, zatímco po překročení této prahové hodnoty rostoucí policejní aktivita průměrnou míru kriminality již úspěšně snižuje.

4.1 Model 1: Evoluční teorie mimetické rivality aneb proč může globální integrace vést k terorismu

4.1.1 Výchozí model

d’Artigues a Vignolo (2003) použili model evoluční hry pro zkoumání chování *n* asymetrických zemí v dlouhém období.[26] Asymetrie mezi zeměmi může vznikat například z velikosti země, použité technologie nebo intelektuální vybavenosti. V tomto modelu je asymetrie vyjádřená hodnotou výplaty, kterou daná země získá v mezinárodním obchodě.

Nechť $C = \{1, ..., i, ..., n\}$, $n \geq 2$ představuje množinu *n* asymetrických zemí. Mezinárodní obchod mezi zeměmi *i* a *j* je vyjádřen jako koordinační hra, ve které mají hráči (země) k dispozici dvě strategie: integrovat ve světové ekonomice (strategie *E*), nebo zůstat v autarkii (strategie *A*). V každé periodě $t = 1, 2, 3 ...$ se země párují a zúčastňují koordinační hry za předpokladu, že disponují omezenou racionalitou, využívají zkušenosti nabyté v minulosti a dodržují jednoduchá pravidla chování. Odpovídající výplatní matice vypadá následovně:

Tabulka 4.1: Koordinační hra mezinárodního obchodu mezi zeměmi *i* a *j*

	E	A
E	a_i, a_j	$0, \lambda_j$
A	$\lambda_i, 0$	λ_i, λ_j

$0 < \lambda_i < a_i$ pro $\forall\ i \in C$ [27]

Zdroj: d‘ Artigues, Vignolo (2003)

Tato hra má dvě striktní Nashovy rovnováhy (*E*, *E*) a (*A*, *A*). Nashova rovnováha (*E*, *E*) navíc Pareto-dominuje (*A*, *A*). Integrace ve světové ekonomice (strategie *E*) může tedy vést k Pareto-dominantnímu výsledku, i když se zisky (výplaty) mezi zeměmi liší.

---

[26] Vycházeli přitom z metod Kandoriho, Mailatha, Roba (1993) a Younga (1993).

[27] Protože předpokládáme, že situace, kdy se obě země zúčastní světové ekonomiky, přináší vyšší užitek obou zemím než situace, kdy zůstanou v autarkii, je $a_i > \lambda_i$. V případě, že selže koordinace a každá země zvolí odlišnou strategii, bude výplata země, která zvolí integraci nulová, neboť se předpokládá, že tato země utrpí ztrátu v podobě nákladů investic např. do specializace výroby. Na druhé straně výplata země, která zůstane v autarkii, bude stejná, tj. rovno λ_i.

V evolučním modelu je výsledek určen dvěma mechanismy: *selekcí* a *mutací*. Způsob, jakým si hráči vybírají strategie, korigují své předchozí volby a získávají zkušenost, je obecně popsán selekčním mechanismem. Tento mechanismus předpokládá, že hráči jsou myopičtí a adaptivní a proto nevytvářejí očekávání ohledně budoucnosti, ale berou v úvahu pouze rozhodnutí udělaná v minulosti. Evoluční teorie her nepředpokládá, že všichni hráči změní své strategie podle odpovídajícího selekčního mechanismu simultánně v každé periodě *t*. Spíše se předpokládá jistá *netečnost* (inertia) v evolučních modelech, tj. hráči přizpůsobují své chování nepravidelně. Hypotéza netečnosti není nutnou podmínkou modelu d'Artiguese a Vignola, zvyšuje však hodnověrnost hypotézy *myopického chování*: protože hráči vědí, že pouze malá část populace změní své chování, strategie, které se ukážou efektivními dnes, zůstanou pravděpodobně efektivní i v blízké budoucnosti.

4.1.2 Selekční mechanismus

Nechť $z(t)$ je počet zemí, které zvolili strategii E v čase t, pak průměrná výplata země i bude

$$\pi_i(E,z) = \frac{(z-1)}{n-1} a_i \qquad (1)$$

$$\pi_i(A,z) = \frac{z}{n-1}\lambda_i + \frac{(n-z-1)}{n-1}\lambda_i = \lambda_i = u_i(A). \qquad (2)$$

Pokud země i zvolí strategii A, pak její průměrná výplata bude λ_i nezávisle na tom, jakou strategii zvolí ostatní země. V případě, že země i zvolí strategii E, bude její výplata naopak záviset na $z(t)$, tj. na počtu zemí, které jsou angažovány ve světové ekonomice.

Ideu mimetické rivality d'Artigues a Vignolo vyjádřili prostřednictvím *uspokojovací dynamiky* Smallwooda a Conliska, která představuje selekční mechanismus modelu. Tato dynamika má podobu behaviorálního pravidla, podle kterého si řídí všechny země – každá země se snaží co nejvíce zmenšit rozdíl mezi sebou samou a nejvyspělejší zemí, resp. skupinou nejvyspělejší zemí. Toto behaviorální pravidlo může být chápáno jako vyjádření „závisti“, kdy nám záleží nejen na vlastní výplatě, ale i na výplatě druhých. Na základě uspokojovací dynamiky si země i si v čase t vybere strategii, která splňuje následující podmínku

$$s_i(t) \in \arg\min_s [\mu - \pi_i(s, z(t))] \neq \arg\max \pi_i(s, z(t)) \qquad (3)$$

kde $\pi(t) = (\pi_1(t), ..., \pi_i(t), ..., \pi_n(t))$ je množina výplat všech zemí v čase *t*, podobně $s(t) = (s_1(t), ..., s_i(t), ..., s_n(t))$ je množina strategií všech zemí v čase *t*, $\mu = \max_{i \neq j} \pi_j(s, z(t))$ je maximální realizovaná výplata, která je dosažena určitou zemí, případně určitou skupinou zemí. Tato dynamika předpokládá, že každá země je schopná zpozorovat hodnotu μ (což představuje určitý stupeň uspokojení) a bude ji porovnávat s průměrnou výplatou, které je schopna dosáhnout se svojí aktuální strategií *s*. Pokud $\mu - \pi_i > 0$, pak pravidlo (3) indikuje, že každá země se bude snažit vybrat takovou strategii, která co nejvíce sníží rozdíl mezi μ a její vlastní výplatou.

4.1.3 Mutace

Přítomnost mutace je dalším předpokladem ovlivňující řešení evolučního modelu. S malou pravděpodobností ε hráč mutuje, tj. vybírá strategii, která není optimální. V souladu s Kandorim, Mailathem a Robem (1993), d'Artigues a Vignolo vysvětlují vznik mutace dvěma způsoby. Za prvé, mutace může být vnímána jako nedobrovolné experimentování nové strategie, neboť hráči (v tomto případě země) nemají dostatek informací o struktuře ekonomiky a experimentují se strategiemi za účelem získat více informací. Tento přístup je založen na učení cestou pokus – omyl. Za druhé, mutace může představovat proces výstupu některých zemí ze světového obchodu a jejich nahrazení jinými zeměmi, které ví méně, nebo neví nic o hře a proto vybírají strategie náhodně.

Cílem analýzy autorů je naleznout dlouhodobou rovnováhu hry pro $\varepsilon \to 0$.

4.1.4 Dlouhodobá rovnováha

Koncept *rizikové dominance* (risk-dominance), vyvinutý Harsanyiem a Seltenem hraje klíčovou roli v modelu d'Artiguese a Vignola. Toto kritérium navrhuje výběr rovnováhy hry na základě porovnání rizikovosti strategií. Rizikově-dominantní rovnováha je rovnováha s nejvyšším Nashovým produktem, tj. taková rovnováha, pro kterou je ztráta výplaty při odchýlení největší.[28]

[28] Pro symetrickou koordinační bimaticovou hru s výplatní maticí:

	A	B
A	$a,\ a$	b, c
B	c, b	d, d

$a > c,\ d > b$

Pro koordinační hru s výplatní maticí v tabulce 4.1 Nashova rovnováha (E, E) dominuje (A, A) z hlediska rizikové dominance, pokud $(a_i - \lambda_i)(a_j - \lambda_j) > \lambda_i\lambda_j$. V případě, že jsou země *symetrické*, tj. $a_i = a_j$, $\lambda_i = \lambda_j$, pro všechna $i, j \in C$ se tato podmínka redukuje na $\frac{a_i}{2} > \lambda_i$, což bude odpovídat optimální reakci při očekávané protihráčovy strategie $\sigma = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}A$.

Pro svět symetrických zemí, kde $\frac{a_i}{2} > \lambda_i$, $a_i = a_j$ a $\lambda_i = \lambda_j$ pro všechna $i, j \in C$, d'Artigues a Vignolo formulovali následující tvrzení:

Ve světě symetrických zemí definovaných výše, evoluční rovnováha hry mezinárodního obchodu v dlouhém období je taková rovnováha, ve které se všechny země účastní světové ekonomiky.

Při formulaci tohoto tvrzení vycházeli z výsledků Kandoriho, Mailatha a Roba (1993), kteří ukázali, že rovnováha v dlouhém období pro symetrickou koordinační hru je taková rovnováha, která je tvořena rizikově-dominantními strategiemi.[29] V modelu d'Artiguese a Vignola je integrace ve světové ekonomice (strategie E) rizikově-dominantní, proto bude tvořit rovnováhu v dlouhém období.

---

je strategie A riziko-dominantní, pokud $(a-c)^2 > (d-b)^2$. Protože platí $a > c$ a $d > b$, můžeme podmínku zjednodušit na tvar $a - c > d - b$, resp. $a - d > c - b$.

[29] Kandori, Mailath a Rob (1993) vytvořili model s konečnou populací hráčů, kteří se zúčastňují opakované symetrické bimaticové koordinační hry v čase, jejíž výplaty splňují podmínkou slabé monotonie. Tato podmínka vyžaduje, aby se četnost výskytu strategie s vyšší výplatou v populaci zvyšovala alespoň stejně rychle jako četnost výskytu strategie s nižší výplatou. Mutace představuje klíčový koncept v jejich analýze a přináší stochastický proces, ve kterém rovnováhy v dlouhém období závisejí pouze na výplatní struktuře hry (resp. na relativní velikosti oblasti přitažlivosti). Predikce jsou nezávislé na jemných detailech deterministické dynamiky a proto výsledky jejich modelu mohou být aplikovatelné i pro jiné situace. Při zkoumání dynamiky v dlouhém období došli autoři k dvěma klíčovým závěrům. Za prvé, pro daný poměr mutantů v populaci existuje ustálená distribuce strategií v dlouhém období, která nezávisí na původních podmínkách. Za druhé, má-li hra dvě symetrické striktní Nashovy rovnováhy, pak limitní distribuce (tj. limita distribuce strategií v populaci pro podíl mutantů jdoucí k nule) bude směřovat s pravděpodobností 1 ke strategii, která splňuje podmínku rizikové-dominance. Navíc tento výsledek vyžaduje pouze podmínku slabé monotonie ve výplatě.

K nalezení rovnováhy v dlouhém období pro asymetrické země rozdělili množinu zemí C na dvě podmnožiny, C_E a C_A. C_E reprezentuje skupinu zemí, pro které je strategie E rizikově-dominantní ve smyslu, že země hrají vzájemně (tj. sami se sebou, nebo s jinou zemí stejné skupiny). Podobně, C_A reprezentuje skupinu zemí, pro které je strategie A rizikově-dominantní ve smyslu, že země hrají vzájemně. Dále předpokládali, že neexistuje země, pro kterou platí $a_i = 2\lambda_i$. Poté formulovali nutnou podmínku existence mimetické rivality (tj. situace, kdy díky frustraci země zvolí strategii, která zhorší pozici protihráče) v následujícím tvrzení:

Ve světě asymetrických zemí definovaných výše s rovnovážným stavem takovým, ve kterém jsou všechny země zúčastněné ve světové ekonomice, existuje země j $\in$ C_A, která si vybere strategii A , pokud je splněna podmínka: $a_i - \lambda_i < \frac{\mu}{n-1}$.

K důkazu tohoto tvrzení předpokládali, že v čase t každá země zvolí strategii E, tj. $z(t) = n$. Předpokládejme, že země j ze skupiny C_A dostane příležitost aktualizovat svoji volbu strategie v čase $t+1>t$. Protože $j \in C_A$, strategie A je pro ni rizikově-dominantní a platí $a_j < 2\lambda_j$. Všechny země se chovají podle uspokojovací dynamiky (3), budou proto porovnávat svoji výplatu s maximální realizovanou výplatou: v případě, že země j zvolí strategii E jako ostatní země, bude její výplata a_j a bude ji porovnávat s μ,[30] pokud se rozhodne pro změnu a zvolí strategii A, bude její výplata λ_j a bude ji porovnávat s $\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\mu$.[31] Země j zvolí strategii A v případě, že $\mu - a_j > \left(\frac{n-2}{n-1}\right)\mu - \lambda_j$ a tedy $a_j - \lambda_j < \frac{\mu}{n-1}$.

---

[30] Protože se země řídí uspokojovací dynamikou, předpokládá se, že je každá země schopna zpozorovat nejvyšší realizovanou výplatu μ, pro kterou platí

$$\mu = \max_{i \neq j} \pi_i(E, z(t)) = \max_{i \neq j} \frac{z-1}{n-1} a_i = \max_{i \neq j} \frac{n-1}{n-1} a_i = \max_{i \neq j} a_i,$$

kde $z = n$ a $\pi_i(E, z(t)) = \frac{z-1}{n-1} a_i$ (viz. (1)).

[31] Pokud země $j \notin C_E$ zvolí autarkii, pak bude $z = n-1$ a maximální realizovaná výplata, se kterou bude porovnávat, bude

$$\mu' = \max_{i \neq j} \pi_i(E, z(t)) = \max_{i \neq j} \frac{z-1}{n-1} a_i = \max_{i \neq j} \frac{n-1-1}{n-1} a_i = \max_{i \neq j} \frac{n-2}{n-1} a_i = \frac{n-2}{n-1} \max_{i \neq j} a_i = \frac{n-2}{n-1} \mu..$$

Pokud bude rozdíl $a_j - \lambda_j$ dostatečně malý, aby nepřekročil hranici $\frac{\mu}{n-1}$, pak existuje alespoň jedna země $j \in C_A$, která zvolí autarkii. Zvolení autarkie zároveň degraduje situaci vedoucí země, resp. skupinu vedoucích zemí, neboť počet zemí integrované ve světové ekonomice v čase t ($z(t)$) se sníží a v důsledku toho se sníží i výplata $\pi(E, z(t))$. Podmínka mimetické rivality specifikuje, jak velký má být rozdíl mezi výplatami strategií E a A, aby alespoň jedna země zvolila autarkii. Skutečnost, že daná země spadá do skupiny C_A, není postačující podmínkou pro vybrání strategie A, např. pokud bude n velké, aby byla splněna podmínka mimetické rivality, musí být také μ dostatečně velké. S tím, jak se bude zvyšovat maximální realizovaná výplata μ, porostou rozdíly mezi zeměmi, se bude počet zemí $j \in C_A$, které zvolí negativní chování, zvyšovat. V tomto modelu se d'Artigues a Vignolo zaměřili pouze na hledání momentu zvratu, kdy volba autarkie se vyplatí alespoň jedné zemi. Dalším vývojem mezinárodního obchodu po překročení tohoto momentu se již nezabývali.

4.1.5 Závěr

Integrace a hospodářská soutěž jsou obvykle vnímány jako způsob, jak vytvořit pozitivní zisk všem účastníkům mezinárodního obchodu. D'Artigues a Vignolo ukázali, že integrace a vzájemné interakce mezi symetrickými zeměmi vede v dlouhém období k účasti všech zemí ve světové ekonomice. Tato evoluční rovnováha je zároveň Pareto-dominantním stavem. Na druhé straně, pokud jsou přítomny velké rozdíly mezi zeměmi, s růstem výplat vedoucích zemí v dlouhém období může globální integrace vést k formaci dvou bloků zemí, které odrážejí trvalou propast mezi skupinou vedoucích zemí a ostatními, méně rozvinutými zeměmi, zeměmi třetího světa či muslimskými zeměmi. Počáteční rozdílnost mezi zeměmi může být způsobena kulturními a obchodními bariérami. Použití vhodných metod a stimulů ke snížení rozdílnosti mezi zeměmi proto může vést k větší integraci zemí ve světové ekonomice. Neboť jak d'Artigues a Vignolo ukázali, obchod sám o sobě nestačí na vytvoření větší blízkosti zemí, ale může vést v extrémních případech dokonce k násilí a terorismu.

4.2 Model 2: Evoluční dynamika majetkové kriminality

K analýze této problematiky Cressman, Morrison a Wen (1998) vytvořili dva modely. V prvním uvažovali nulovou míru policejní aktivity, tj. vlastníci jsou zcela odpovědní za dopadení pachatelů, zatímco justiční systém odpovídá za jejich potrestání. Druhý model představuje rozšíření prvního o veřejně poskytnutý policejní dohled.

4.2.1 Model soukromé ochrany majetku

Cressman, Morrison a Wen uvažovali asymetrickou maticovou hru dvou hráčů, z nichž jeden byl vlastníkem a druhý oportunistou. Vlastník představoval možnou oběť krádeže a měl k dispozici dvě volby ochrany svého majetku: *pasivní* (strategie P) (nulové úsilí vynaložené na ochranu majetku a prevenci krádeže) a *aktivní* (strategie A) (fixní pozitivní úsilí). Oportunista byl jedinec konfrontovaný příležitostí ke krádeži, který se rozhodoval na základě výše očekávané výplaty, zda příležitost využije, tj. bude *krást* (strategie K) či nikoliv, tj. *nebude krást* (strategie N).

Předpokládali, že (i) soukromá ochrana majetku byla nákladná; (ii) při krádeži došlo ke transferu majetku vlastníka k oportunistovi; (iii) zloděj byl chycen pokud narazil na aktivního vlastníka (tj. vlastník uchránil svůj majetek);[32] (iv) zloděj byl vždy úspěšný při napadení pasivního vlastníka; (v) chycený zloděj byl potrestán státem. Výplatní matice reflektující tyto předpoklady vypadá následovně:

[32] Bez újmy na obecnosti lze tento předpoklad nahradit mírnějším předpokladem, že aktivní vlastník má větší pravděpodobnost dopadení zloděje než pasivní vlastník.

Tabulka 4.2: Výplatní matice modelu se soukromou ochranou majetku[33]

		Oportunista	
		N	K
Vlastník	A	a, α	b, β
	P	c, γ	d, δ

$c > a \geq b > d;\ \delta > \gamma \geq \alpha > \beta$[34]

Zdroj: Cressman, Morison, Wen (1998)

Hra má pouze jedinou smíšenou Nashovu rovnováhu, kdy vlastník bude aktivní s pravděpodobností p^* a pasivní s pravděpodobností $1-p^*$, zatímco oportunista nebude krást s pravděpodobností q^* a bude krást s pravděpodobností $1-q^*$:

$$\sigma = p^* A + (1-p^*)P = \frac{\delta-\gamma}{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}A + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}P$$
$$\tau = q^* N + (1-q^*)K = \frac{b-d}{b+c-(a+d)}N + \frac{c-a}{b+c-(a+d)}K.$$

Očekávané hodnoty výplat při zvolení této Nashovy rovnováhy budou:

$$\begin{aligned}\pi_{vlastník}(\sigma,\tau) &= ap^*q^* + bp^*(1-q^*) + c(1-p^*)q^* + d(1-p^*)(1-q^*)\\ &= \frac{bc-ad}{b+c-(a+d)}\\ \pi_{oportunista}(\sigma,\tau) &= \alpha q^* p^* + \beta(1-q^*)p^* + \gamma q^*(1-p^*) + \delta(1-q^*)(1-p^*)\\ &= \frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}.\end{aligned}$$

---

[33] Struktura výplatní matice je stejná jako v modelu ‚kupec vs. prodejce', který jsme uvedli jako ilustrativní příklad dynamiky asymetrické bimaticové hry v části 3.3.

[34] V případě, že oportunista nebude krást, bude pasivní vlastník na tom lépe než aktivní vlastník o ušetřené výdaje na ochranu majetku před krádeží, proto platí $c > a$. Pokud bude oportunista krást, pak naopak na tom bude aktivní vlastník lépe než pasivní jedinec, neboť ubrání svůj majetek chycením zloděje, zatímco pasivní vlastník o majetek přijde (viz. předpoklady (iii) a (iv)), proto bude $b > d$. Dále $a \geq b$ reflektuje možnost zničení majetku pokud se zloděj pokusí o krádež, $\alpha > \beta$ reflektuje výši trestu, který bude na zloděje uvalen v případě dopadení a $\gamma \geq \alpha$ reflektuje skutečnost, že i když oportunista nebude krást, může přesto nést vedlejší náklady způsobené aktivním vlastníkem. Naposledy, $\gamma > \delta$, protože oportunista, který vykrade pasivního vlastníka, bude vždy úspěšný (viz. předpoklad (iv)), proto získá více než ten, který nevyužije příležitost takového vlastníka vykrást.

Vliv výše trestu za spáchání zločinu

Pokud se zpřísní trest za spáchání zločinu (tj. snížení hodnoty β), pak se výplata vlastníka nezmění, neboť nezávisí na β. Změna výplaty oportunisty při snížení β za předpokladu, že se p^* a q^* budou měnit očekávaným způsobem, bude:

$$\frac{\partial \pi_{oportunista}}{\partial \beta} = \frac{-\gamma(\alpha+\delta-(\beta+\gamma))+(\alpha\delta-\gamma\beta)}{(\alpha+\delta-(\beta+\gamma))^2}$$
$$= \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\delta)}{(\alpha+\delta-(\beta+\gamma))^2} \leq 0,$$

Derivace podle β přinesla paradoxní výsledek, že zpřísnění trestu pro dopadené delikventy nebude mít žádný efekt na očekávanou výplatu oportunisty pokud $\gamma = \alpha$, nebo dokonce může zvýšit jeho výplatu pokud $\gamma > \alpha$. [35]

Cressman, Morison a Wen hledají odůvodnění tohoto efektu prostřednictvím dynamické dedukce, založené na *adaptivním chování* populace vlastníků a oportunistů. Na základě tohoto chování podíly populace volící úspěšnější strategie vzrůstají v čase, zatímco podíly populace s méně úspěšnými strategiemi v čase klesají. V reakci na zvýšení trestu v případě dopadení se nejdříve zvýší q^*, tedy pravděpodobnost, že oportunista nebude krást, protože očekávaná výplata tohoto jedince bude vyšší než výplata oportunisty, který bude krást. S tím, jak se sníží pravděpodobnost krádeže, se zvýší očekávaná výplata pasivního vlastníka v porovnání s aktivním vlastníkem. Adaptivní dynamika bude proto upřednostňovat větší pasivnost ochrany majetku a p^* bude klesat. Oba trendy budou pokračovat dokud p^* nebude dostatečně malé, aby bylo pro oportunistu opět výhodnější krást. V dlouhém období může populace vlastníků a oportunistů vykazovat rovnovážné chování podle výše uvedené komparativní statiky. Pro přesnější modelování dynamiky systému autoři zavedli evoluční interpretaci hry prostřednictvím replikátoru dynamiky.

Evoluční dynamika

Replikátor dynamiky modelu je dán následovně:

$$\dot{p} = p(\pi_{vlastník}(p,\tau) - (p\pi_{vlastník}(p,\tau) + (1-p)\pi_{vlastník}(1-p,\tau))$$
$$= p(1-p)(b-d-(b+c-(a+d))q)$$

[35] Zde jsme při analýze znaménka derivace respektovali předpoklad modelu, že $\delta > \gamma \geq \alpha > \beta$.

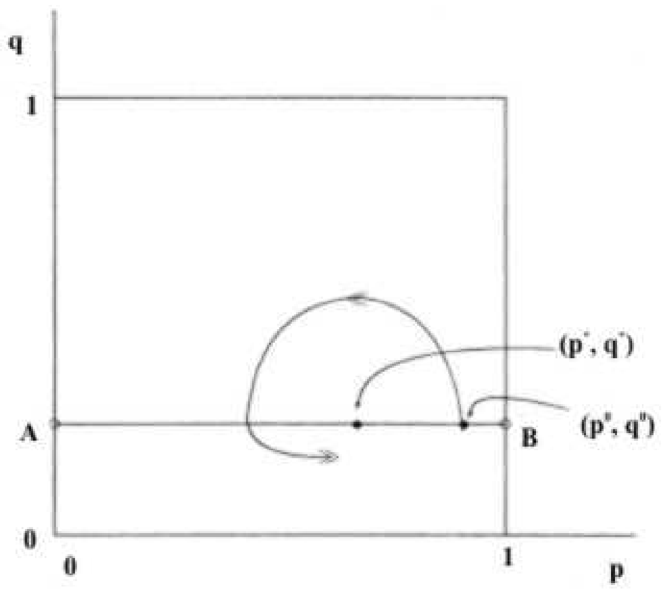
$$\begin{aligned}\dot{q} &= q(\pi_{oportunista}(\sigma,q)-(q\pi_{oportunista}(\sigma,q)+(1-q)\pi_{oportunista}(\sigma,1-q)) \\ &= q(1-q)(\gamma-\delta-(\gamma-\delta-(\alpha+\beta-(\alpha+\delta))p).\end{aligned}$$

Tento replikátor dynamiky má pouze jeden stacionární bod, který odpovídá dvojici Nashových rovnováh (σ,τ), kde

$$\begin{aligned}\sigma &= p^{*}A+(1-p^{*})P=\frac{\delta-\gamma}{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}A+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\delta-(\beta+\gamma)}P \\ \tau &= q^{*}N+(1-q^{*})K=\frac{b-d}{b+c-(a+d)}N+\frac{c-a}{b+c-(a+d)}K.\end{aligned} \tag{4}$$

Pokud se systém nachází v čase t_0 v kterémkoliv bodě (p^0, q^0) různé od (p^*, q^*), pak trajektorie replikátoru dynamiky startující z tohoto bodu bude kroužit proti směru hodinových ručiček kolem (p^*, q^*) v uzavřených orbitech, nebude však nikdy konvergovat k evolučnímu ohnisku (p^*, q^*).[36] Navíc evoluční ohnisko (p^*, q^*) představuje také průměrné chování populace v dlouhém období:[37]

Obrázek 4.1: Trajektorie evoluční dynamiky startující z bodu (p^0, q^0)



Zdroj: Cressman, Morrison, Wen (1998)

[36] Toto je dáno podobou replikátoru dynamiky (4), který představuje zobecnění Friedmanova modelu kupec vs. prodejce z části 3.3 a postup při odvozování tvarů trajektorií je podobný, proto jej zde nebudeme znovu uvádět. Více také např. Gintis (2000).

[37] Při formulaci tohoto tvrzení autoři vycházeli z výsledků Hofbauera a Sigmunda, kteří zkoumali dynamiku hry souboje pohlaví (Battle of the Sexes).

Pokud bude výplata oportunisty, který vykrade aktivního vlastníka (β) přibližně stejná jako jeho výplata v případě, že nekrade a vlastník je aktivní (α), pak většina vlastníků bude aktivních (tj. Nashova rovnováha (p^*, q^*) bude blízko bodu $(1, q^*)$ na obr. 4.1). S tím, jak se bude zpřísňovat trest, bude klesat β a v důsledku toho bude také ubývat počet aktivních vlastníků. Pro nekonečně vysoký trest nebude žádný vlastník aktivní (tj. (p^*, q^*) bude konvergovat k bodu $(0, q^*)$). Na základě tohoto Cressman, Morrison a Wen došli k závěru, že v dlouhém období průměrná míra kriminality může být nezávislá na výši trestu stanovená státem, dokonce i když v krátkém období vykazuje snížení. Navíc přísnější tresty mohou zvýšit očekávanou výplatu oportunisty (pokud bude $\gamma > \alpha$) i v případě, že průměrná míra kriminality je konstantní. Tento závěr ovšem předpokládá, že soukromé úsilí vlastníků na ochranu majetku je jedinou determinantou určující, zda bude zloděj chycen.

4.2.2 Model s veřejnou policejní aktivitou

V tomto modelu centrální autorita může angažovat strážce zákona na dopadení delikventů nezávisle na tom, kolik úsilí vyvinou vlastníci na ochranu svého majetku. Dalšími předpoklady modelu jsou: (i) zloděj bude vždy dopaden, pokud bude policie přítomna na místě zločinu (tj. bude aktivní); (ii) v případě její absence zloděj uprchne, pokud nebude vlastník aktivní; (iii) pokud budou policie i vlastník aktivní, výplata oportunisty zůstane stejná jako v případě, kdy je buď policie, nebo vlastník aktivní. Zjevně tedy stačí aktivita policie k odrazení oportunisty z pokusu o krádež, proto vlastník bude preferovat být pasivní, čímž ušetří výdaje na ochranu.

Dále se předpokládá existence fixní a obecně známé pravděpodobnosti x, že policie bude přítomná na místě zločinu. Ve skutečnosti x představuje úroveň zdrojů a technologie užívané policií k ochraně majetku a dopadení zlodějů. Náklady na policejní aktivitu jsou financovány prostřednictvím paušální daně ve výši $T(x)$, uvalené na každého jednotlivce.[38]

[38] Stejná rovnováha bude dosažena i v případě, že by daň platili pouze vlastníci.

Tabulka 4.3: Výplatní matice modelu s veřejnou policejní kontrolou

		Oportunista	
		N	K
Vlastník	A	$a - T$, $\alpha - T$	$b - T$, $\beta - T$
	P	$c - T$, $\gamma - T$	$d' - T$, $\delta - T$

$$c > a \geq b > d;\ \delta > \gamma \geq \alpha > \beta$$

Zdroj: Cressman, Morrison, Wen (1998)

Hodnoty výplat v prvním řádku zůstávají stejné jako v případě modelu se soukromou ochranou majetku, tj. pokud bude vlastník aktivní, pak výsledek nebude záležet na tom, zda bude policie aktivní či nikoliv. Podobně, c a γ zůstávají stejné, protože pokud nebude oportunista krást, přítomnost policie bude irelevantní. Jediným případem, kdy přítomnost policie bude mít vliv na výsledek, odlišný od modelu se soukromou ochranou, je situace, kdy bude vlastník pasivní a oportunista krást.

Nechť I jsou náklady vlastníka vynaložené na koupě zařízení k ochraně majetku, jako jsou zabezpečovací či poplašná zařízení. V případě, že oportunista bude krást a policie bude aktivní s pravděpodobností x, bude výplata pasivního jedince stejná jako výplata aktivního jedince navýšená o úspory ve výši I. Pokud bude policie neaktivní s pravděpodobností $1 - x$ a oportunista bude krást, výplata pasivního jedince bude stejná jako v případě modelu s nulovou veřejnou policejní ochranou. Proto očekávaná výplata pasivního vlastníka, když bude oportunista krást, bude:

$$\pi_{vlastník}(P,K) = d' - T = x(b+I) + (1-x)d - T\ .$$

Protože $b > d$, bude $d' > d$.

Na druhé straně výplata oportunisty, který bude krást, závisí na pravděpodobnosti, s jakou bude policie aktivní:

$$\pi_{oportunista}(P,K) = \delta' - T = x\beta + (1-x)\delta - T\ .$$

Protože $\beta < \delta$, bude $\delta' < \delta$ pro $x > 0$.

I v tomto případě má hra pouze jedinou dvojici smíšených Nashových rovnováh (σ, τ), kde vlastník bude aktivní s pravděpodobností p^* a oportunista bude krást s pravděpodobností $1 - q^*$:

$$\begin{aligned}\sigma &= p^*A + (1-p^*)P = \frac{\delta' - \gamma}{\alpha + \delta' - \beta - \gamma}A + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \delta' - \beta - \gamma}B \\ \tau &= q^*N + (1-q^*)K = \frac{b-d'}{b+c-a-d'}N + \frac{c-a}{b+c-a-d'}K.\end{aligned} \tag{5}$$

Vliv policejní aktivity a výše paušální daně na míru kriminality

V tomto modelu Cressman, Morrison a Wen zkoumali, jak změny policejní aktivity x a výše paušální daně T ovlivní rovnovážný poměr zlodějů v populaci oportunistů a průměrné výplaty vlastníků a oportunistů. Je zřejmé z výplatní matice, že výše daně změní pouze rovnovážné hodnoty výplat, nikoliv rovnovážné strategie.

Pokud jde o policejní aktivitu, její vliv na složení vlastníků a oportunistů v populaci bude:

$$\begin{gathered}\frac{\partial p^*}{\partial \delta'} = \frac{(\alpha + \delta' - \beta - \gamma) - (\delta' - \gamma)}{(\alpha + \delta' - \beta - \gamma)^2} = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \delta' - \beta - \gamma)^2} > 0, \\ \frac{\partial (1-q^*)}{\partial d'} = \frac{0 - (c-a)(-1)}{(b+c-a-d')^2} = \frac{c-a}{(b+c-a-d')^2} > 0, \\ \frac{\partial \delta'}{\partial x} = \beta - \delta < 0, \quad \frac{\partial d'}{\partial x} = b + I - d > 0 \\ \to \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{\partial \delta'}\frac{\partial \delta'}{\partial x} < 0 \\ \to \frac{\partial (1-q^*)}{\partial x} = \frac{\partial (1-q^*)}{\partial d'}\frac{\partial d'}{\partial x} > 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Vidíme tedy, že pokud bude policejní aktivita x v takové míře, která zachová platnost $\delta' > \gamma$, $d' < b$ (tj. zajistí existenci nenulového množství aktivních vlastníků a oportunistu-zlodějů v odpovídajících populacích), pak s tím, jak se zvýší míra policejní aktivity, podíl aktivních vlastníků bude klesat, zatímco podíl zlodějů v populaci oportunistů poroste. To je dáno existencí morálního hazardu v populaci vlastníků, neboť pokud budou policie i vlastník aktivní, výplata oportunisty zůstane stejná jako v případě, kdy je buď policie, nebo vlastník aktivní. Zjevně tedy stačí aktivita policie k odrazení oportunisty z pokusu o krádež, proto s tím, jak poroste míra policejní aktivity, bude vlastník preferovat být pasivní, čímž ušetří výdaje na ochranu. Policejní aktivita může dokonce vytlačit aktivitu vlastníků do takové míry, že pravděpodobnost, že oportunista narazí na pasivní vlastníka je natolik vysoká, že se oportunistům vyplatí krást a míra kriminality nakonec vzroste.

Na druhé straně, pokud míra policejní aktivity se zvýši natolik, že výplata oportunisty, který krade, když je vlastník pasivní (δ'), bude nižší než výplata oportunisty, který nekrade, když je vlastník pasivní (γ), pak strategie nekrást *N* se stane dominantní pro oportunisty a následně se strategie pasivní *P* stává dominantní pro vlastníky. Jinými slovy, když se nevyplatí krást ani vůči pasivnímu vlastníkovi, tak už se nevyplatí krást vůbec. Podobně, pokud $d' > b$, pak pro vlastníky bude dominantní strategie pasivní *P* a v důsledku toho se strategie krást *K* stane pro oportunisty dominantní. Tj. když ochrana před zlodějem povede k horší výplatě než když není ochrana žádná, pak se nevyplatí být aktivní vůbec.

Evoluční dynamika

Pro názornější demonstraci evoluční dynamiky systému, Cressman, Morrison a Wen zvolili konkrétní hodnoty výplat a položili *I* = 1:

Tabulka 4.4: Výplatní matice modelu s veřejnou policejní kontrolou

		Oportunista	
		Nekrást	*Krást*
Vlastník	*Aktivní*	3 – *T*, 2 – *T*	2 – *T*, 1 – *T*
	Pasivní	4 – *T*, 3 – *T*	2*x* + 1 – *T*, 4 – 3*x* – *T*

Zdroj: Cressman, Morrison, Wen (1998)

Replikátor dynamiky je dán podobnou soustavou rovnic jako v případě modelu se soukromou ochranou majetku:

$$\dot{p} = p(1-q)(1-2x-(2-2x)q)$$
$$\dot{q} = q(1-q)(1-3x-(2-3x)p)$$

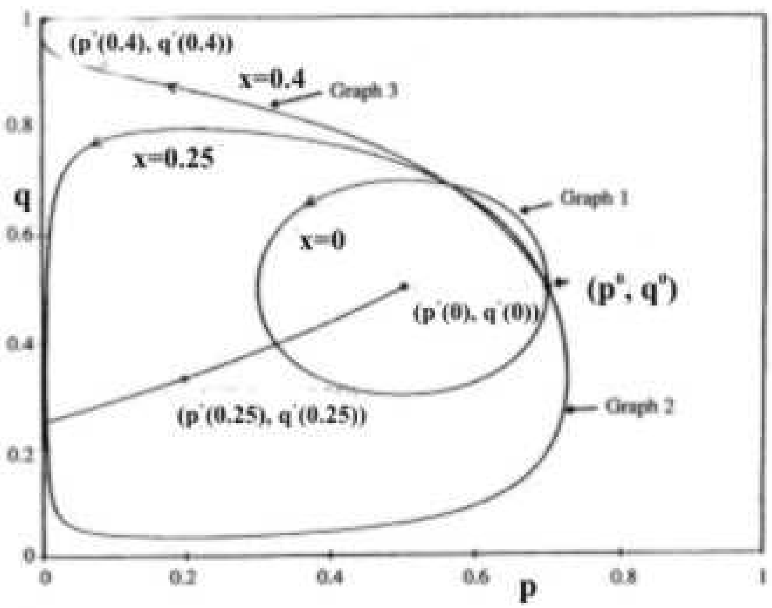
Z tabulky 4.4 vidíme, že pro $x < \frac{1}{2}$ bude $d' > b$ a pro $x < \frac{1}{3}$ bude $\delta' < \gamma$ a hra bude mít jedinou smíšenou Nashovu rovnováhu (σ, τ) s odpovídajícími výplatami:

$$\sigma = \frac{1-3x}{2-3x}A + \frac{1}{2-3x}P \qquad \pi_{vlastník}(\sigma,\tau) = \frac{5-6x}{2-2x} - T$$
$$\tau = \frac{1-2x}{2-2x}N + \frac{1}{2-2x}K \qquad \pi_{oportunista}(\sigma,\tau) = \frac{5-6x}{2-3x} - T.$$

Protože se jedná o asymetrickou hru, která má pouze smíšenou Nashovu rovnováhu, tato rovnováha není evoluční rovnováhou. Obrázek 4.2 ilustruje dynamiku systému spojenou se změnami Nashovy rovnováhy, které jsou reprezentovány rovnovážnou křivkou procházející body $(p^*(x), q^*(x))$ pro různé hodnoty *x*. Trajektorie startující z bodu (p^0, q^0) budou kroužit kolem odpovídajících rovnovážných bodů $(p^*(x), q^*(x))$ pro $x = 0$ a $x = 0.25$ a budou konvergovat k bodu $(p^*(x), q^*(x)) = (0{,}1)$ pro $x = 0.4$. Například v grafu 2 trajektorie startující z bodu (p^0, q^0) se pohybuje proti směru hodinových ručiček a klesá s tím, jak se přibližuje k bodu $(p, q) = (0,\ 0.8)$, zatímco v grafu 3 trajektorie stoupá s tím, jak se přibližuje k počátku osy *p*.[39]

Pro hodnoty $x < \frac{1}{3}$ trajektorie replikátoru dynamiky ukazují, že policejní aktivita může vytlačit soukromé úsilí ochránit majetek před zloději v takové míře, že dlouhodobá míra kriminality nakonec poroste. Pro $x = 0.4$ bude naopak aktivita policie natolik zásadní při prevenci krádeží, že oportunisti vesměs přestanou krást, dokonce i když podíl aktivních vlastníků v populaci se bude snižovat.

Obrázek 4.2: Trajektorie replikátoru dynamiky startující z bodu $(p^0, q^0) = (0.7,\ 0.5)$ pro $x = \{0;\ 0.25;\ 0.4\}$



Zdroj: Cressman, Morrison, Wen (1998)

[39] Kvůli lepšímu porovnání trajektorií pro různé hodnoty policejní aktivity *x* autoři zvolili stejný startující bod pro všechny trajektorie, zde $(p^0, q^0) = (0.7,\ 0.5)$. Platí však, že každý jiný startující bod trajektorií, který neleží na rovnovážné křivce, by přinesl podobné výsledky.

4.2.3 Závěr

Analýza Cressmana, Morrisona a Wena ukázala, že přísnější tresty pro pachatele a vyšší policejní aktivita v dlouhém období nemusí vést ke snížení míry majetkové kriminality v dlouhém období. Tento výsledek vychází z morálního hazardu spojeného s potenciální redukcí úsilí vlastníků ochránit svůj majetek v reakci na změny míry kriminality a legálního systému (výše trestů, policejní aktivita). Proto krátkodobé trendy majetkové kriminality mohou být klamné, pokud nebude věnována dostatečná pozornost odpovídající dynamice.

Ačkoliv tento model obsahuje četná zjednodušení (viz. např. pouze binární výběr strategií vlastníků v oportunistů nebo vzájemná vylučitelnost rolí – ve skutečnosti se každý vlastník může rozhodnout zda využije příležitost ke krádeži, stejně tak jako každý oportunista může být zároveň vlastníkem), autoři naznačují další ekonomické oblasti, kde může být dynamika modelu aplikována.

Jedním příkladem může být teorie regulace a strategické konkurence, kde průmyslové standardy (např. bezpečnost nebo index kvality životního prostředí) jsou determinovány prostřednictvím vzájemných interakcí výrobců, spotřebitelů a regulačního úřadu a spotřebitelé mohou vynaložit úsilí na zajištění kvality výrobků. Pokud zjistíme, že firmy podnikající v průmyslu lobují tvrdší tresty pro ty, kteří nedodrží standardy, jedna z interpretací může být, že přísnější tresty představují bariéry vstupu dané tím, že úřadující firmy již vložili investice k dosažení vysokých standardů. Analýza Cressmana, Morrisona a Wena nabízí alternativní vysvětlení. Přísnější tresty při nedodržení standardů mohou vést ke snížení průměrné míry pozornosti spotřebitelů a v případě, že by aktivita spotřebitelů vůči firmám byla nákladná, mohou dokonce zvýšit očekávanou výplatu firem.

Další situace s podobnými dynamikami, na které lze aplikovat závěry Cressmana, Morrisona a Wena, se týkají morální hazardu spojeného s přenosem odborných informací[40] či s výplatami sociálních dávek.

[40] Viz. Pitchick, Schotter (1987), kteří zkoumali čestnost a s ní spojenou možnost morálního hazardu odborníků při poskytování rad a následném prodeji svých služeb zákazníkům např. v lékařství, servisních službách nebo bankovním sektoru.

5

Další oblasti aplikace evoluční teorie her

V předcházející kapitole jsme si na dvou příkladech ukázali, jakým způsobem lze pracovat s nástroji evoluční teorie her při modelování ekonomických situací. Vzhledem k tomu, že pole působnosti evoluční teorie her se stále vyvíjí a rozšiřuje, nebude naší snahou podat kompletní a do detailů zacházející výčet oblastí, ve kterých se evoluční teorie her uplatňuje. Místo toho se zaměříme na ty oblasti, ve kterých dle našeho názoru evoluční teorie her významným způsobem přispěla k lepšímu pochopení.

5.1 Ekonomický Darwinismus

Skutečnost, že Nashova rovnováha ne vždy vede ke společensky optimálním výsledkům, je již známá v klasické teorii her. Z pohledu evoluční teorie her však může být výsledek mnohem drastičtější. Názornou ukázkou je práce Slothové a Whitta-Jacobsena (2006) *Economic Darwinism* ,[41] ve kterém dospěli k závěru, že v ekonomické

[41] Myšlenka ekonomického Darwinismu, původně diskutována v pracích Armena, Enkeho a Friedmana počátkem padesátých let 20. stol., spočívá v názoru, že behaviorální předpoklady typu maximalizace zisku a užitku na individuální úrovni, či chování v souladu s Nashovou rovnováhou na strategické úrovni by měli být součástí evoluční selekce proti těm, kteří se těmito předpoklady neřídí. Sloth a Whitta-Jacobsen zkoumají explicitně důsledky ekonomického Darwinismu prostřednictvím symetrické hry, kde v každém kole hrají všichni hráči proti všem (playing-the-field) a jejich chování je určeno dvěma determinanty. První je Darwinova selekce: pokud současné chování vede k rozdílům ve výplatě, pak jedincům volící formu chování s nejnižší výplatou je přiřazena striktně pozitivní pravděpodobnost, že budou nahrazeni jinými jedinci volící jakoukoliv jinou formu chování. Druhou determinantou je mutace. Namísto statického konceptu ESS a dynamického konceptu replikátoru dynamiky pracují s Darwinovskou rovnováhou a Darwinovskou selekční dynamikou, které představují variace prvně jmenovaných.

situaci, kdy jsou externality pozitivní, resp. negativní, Darwinovsky stabilní stavy jsou na tom hůře než Nashovsky rovnovážné stavy co se efektivity týče.

Narozdíl od Nashovy rovnováhy, kdy individuální rozhodování je lhostejné k faktu, jak jeho rozhodnutí ovlivní výplaty ostatních, pro ekonomický Darwinismus platí, že dokonce i když zvýšení úsilí přinese jedinci prospěch, toto zvýšení nebude vykonáno, pokud nezlepší *relativní* pozici jedince, tj. pokud nepřinese jedinci vyšší užitek než ostatním. Na druhé straně, pokud určitá forma chování způsobí jedinci újmu, bude zvolena, pokud újma ostatních bude větší (připomeňme si dynamiku uspokojování z modelu mezinárodního obchodu z části 4.1). Toto přináší zvýšenou tendenci (v porovnání s Nashovsky rovnovážným chováním) přispívat (mnohem) méně, než je společensky optimální v případě pozitivních externalit a zatěžovat ostatní více, než je společensky únosné v případě negativních externalit.

5.2 Evoluce kooperace

Evoluční teorie her se stala standardním analytickým nástrojem her typu vězňova dilematu. Tento typ her bývá často využíván pro modelování kolektivních akcí, které jsou spjaty s problémem existence černých pasažérů. Protože problému kooperace v situacích typu vězňova dilematu *dvou* hráčů bylo věnováno mnoho prací, uvedeme si případ méně častý, dle našeho názoru však blíže skutečnosti, tj. kooperace ve hře vězňova dilematu pro *n* hráčů..

Molander (1992) zkoumal spontánní vznik kooperace z evolučního hlediska ve hře vězňova dilematu pro *n* hráčů, kteří mají k dispozici dvě strategie: kooperovat (strategie *C*) a nekooperovat (strategie *D*). Hráči patří do velké populace a skupiny *n* hráčů se formují náhodně. Předpokládá se, že jsou všichni schopni zpozorovat převládající tendenci chování ve skupině a podle ní se rozhodnout: kooperovat pokud dostatečný počet jedinců kooperuje a naopak. Každý hráč přitom může mít jiný podnět ke kooperaci. Výplaty hráčů jsou funkcemi počtu kooperujících hráčů:

$$c_i = c(i)$$

$$d_i = d(i),$$

kde c_i je hodnota výplaty strategie C při počtu kooperujících hráčů i a d_i je výplata strategie D, když i hráčů kooperuje. Dále jsou splněny následující podmínky:

monotónnost:

$$c_i > c_{i-1},\ d_i > d_{i-1} \qquad i = 1, 2, ..., n-1;$$

dominance nekooperativní strategie D:

$$d_i > c_i \qquad i = 0, 1, 2, ..., n-1;$$

efektivnost kooperativní strategie C:

$$(i+1)c_i + (n-i-1)d_{i+1} > ic_{i-1} + (n-i)d_i \qquad i = 1, 2, ..., n-1$$
$$c_{n-1} > d_0,$$

Podmíka (ii) implikuje, že myopičtí hráči zvolí strategii D, která povede k výplatě d_0, pokud bude zvolena všemi hráči. Podmínka (iii) zajišťuje, že výplata v případě zvolení strategie C všemi hráči bude vyšší než výplata v případě zvolení strategie D všemi hráči. Tato podmínka kromě toho zajišťuje, aby se celková výplata zvyšovala s rostoucím počtem kooperujících hráčů.

Při modelování dynamiky hry Molander změnil původní strategie C a D na množinu podmíněných (n + 1) strategií S_0, S_1, ..., S_n, kde:

S_i = kooperovat pokud alespoň i hráčů kooperuje, jinak nekooperovat (i = 0, ..., n – 1),

S_n = nekooperovat vždy.

Maximální míra kooperace, které jsou hráči schopni dosáhnout, je kompatibilní s aktuální kombinací podmíněných strategií S_0, S_1, ..., S_n. Počáteční volbu všech hráčů, kteří nevolí podmíněnou strategii nekooperovat S_n, je kooperace. V závislosti na výsledné míře kooperace budou někteří z nich chtít změnit svoji volbu. V okamžiku, kdy nebude žádný hráč chtít změnit svoji volbu, protože se neočekává žádné další zlepšení, skupina dospěje k dlouhodobé rovnováze, která je evolučně stabilní (ESS). Dynamika modelu byla zkoumána prostřednictvím replikátoru dynamiky, který má podobu:

$$\dot{p}_i = p_i(A_i - A),$$

kde p_i představuje četnost strategie S_i ve skupině, A_i je očekávaná výplata hráče při zvolení strategie S_i a A je průměrná hodnota výplaty celé skupiny.

Hlavní závěry své analýzy Molander formuloval do následujícího tvrzení:[42]

Nechť m značí počet i, pro které je $c_i > d_0$*. Pak pokud* $m < n-1$,

(i) hra má asymptoticky stabilní rovnováhu složenou z kombinace strategií S_m *a* S_n*, která je zároveň ESS.*

(ii) hra má čistě kooperativní rovnováhu, která není ESS.

(iii) hra nemá žádnou jinou ESS.

Pokud $m = n-1$, pak platí podmínka (ii) a hra nemá žádnou ESS.

Dále platí, že čistá nekooperace nemůže být výsledkem této hry. Na druhé straně, míra kooperace se blíží k nule s tím, jak se velikost skupiny (resp. počet hráčů *n*) blíží k nekonečnu (tj. zvyšuje se podíl $\frac{S_n}{S_m}$ v ESS z bodu (i)).

Shrneme-li celou hru pro skupinu *n* hráčů, pak v dlouhém období může skupina dospět k rovnováze, která je evolučně stabilní, ve které určitý podíl hráčů kooperuje a zbytek nekooperuje. Výše míry kooperace závisí na počáteční distribuci pravděpodobností výskytu množiny podmíněných strategií S_0, S_1, ..., S_n (která může být dána preferencemi hráčů). Rovnováha, ve které by všichni kooperovali, není evolučně stabilní pro jakoukoliv počáteční distribuci strategií. Tento poznatek se liší od závěru Vega-Redonoda (2003), který modeloval bimaticovou opakovanou hru vězňova dilematu v rámci velké populace, kde se hráči náhodně *párují*. Prostřednictvím evoluční teorie her ukázal, že od určité prahové hodnoty četnosti zastoupení reciproční strategie půjčka za oplátku (tit-for-tat) v dlouhém období společnost dospěje k evolučně stabilní rovnováze, kdy všichni kooperují.[43]

Pokud bychom na problém kolektivní akce aplikovali výsledek Molandera, pak v dlouhém období společnost dospěje k rovnováze, kdy existuje určitý podíl černých pasažérů ve společnosti. Na druhé straně dle závěrů Vega-Redonda by za určitých podmínek (zde prahová hodnota četnosti zastoupení strategie půjčka za oplátku) mohla

---

[42] Důkaz tvrzení nebudeme kvůli jeho výpočetní zdlouhavosti uvádět. Molander při něm vycházel z definice ESS a vlastností strategií v rovnováze (více viz. Molander 1992).

[43] Narozdíl od modelu Molandera, kde hráči měli původně k dispozici dvě strategie *C* a *D*, ve svém modelu Vega-Redondo rozšířil množinu strategií o strategii půjčka za oplátku.

společnost dospět k rovnováze, kde by kooperovali všichni. Výsledky téže hry se tedy mohou lišit v závislosti na tom, z jakých východisek autoři vycházejí. Proto je při aplikaci výsledků her s obecným řešením na jiné situace třeba jistá obezřetnost.

5.3 Evoluce konvencí

Konvence či společenské normy představují ustálené vzorce chování, které jsou očekávané. Častým důvodem vzniku konvencí je jejich nutnost pro koordinaci chování ve společnosti. Bez společenských pravidel by ve společnosti zavládl chaos a ne-řád.

V termínech teorie her můžeme konvenci označit jako *rovnováhu*, ke které společnost dospěje. V případě, že rovnováh je více, pak skutečnost, která rovnováha bude nakonec zvolená, formuje kulturní diverzitu mezi společnostmi. Přežití určité společenské formy v dlouhém období závisí na institucionálním rámci, jimž v historii společnost prošla. Proto se zdá přirozené, použijeme-li evoluční teorii her jako užitečný nástroj k pochopení procesu formování společenských norem a evoluce kultury.

Ačkoliv dynamika kulturní evoluce lidské společnosti je sama o sobě složitým procesem, řada autorů používá *replikátor dynamiky* k aproximaci modelu kulturní evoluce. V jeho prospěch argumentují, že je schopný kvalitativně zachytit vlastnosti, jež charakterizují evoluční systém, totiž že podíly jedinců, dodržující určitou formu chování v populaci, se zvyšují monotónně s tím, jak se zvyšuje zdatnost odpovídajících forem. Skyrms (1996)[44] dokonce argumentuje, že to, co je důležité, nejsou detaily dynamiky, nýbrž body přitažlivosti systému, neboť tyto body charakterizují (společenské) normy, které se mohou objevit ve společnosti v průběhu času.

Jinou možnost zvolil Young (1993), který pracuje ve stochastickém rámci. V jeho pojetí evoluční teorie her vysvětluje výběr určité rovnováhy (tj. společenské normy) prostřednictvím selekčního mechanismu, který spočívá v *dynamice optimálních odpovědí*. Modelujeme-li interakce ve společnosti jako opakovanou hru, kde hráči v každém kole mohou být stejní nebo odlišní, pak hráči vybírají optimální strategie na základě informací o chování ostatních hráčů v předcházejících kolech (pokud se jedná o stejné hráče, pak se rozhodují na základě zkušeností z kol předcházejících). Změny ve

[44] Citováno podle: Vanderschraaf (1999, str. 334).

způsobu chování mohou být způsobeny náhodnými šoky neboli mutacemi. V dlouhém období systém (společnost) konverguje s vysokou pravděpodobností k jedné z Nashových rovnováh. Tato rovnováha se pak nazývá *stochasticky stabilní* (více viz. Young 1993).

Kromě toho, že se evoluční teorie her ukázala jako užitečný analytický nástroj v této oblasti, její výhoda spočívá ve volnosti, s jakou umožňuje využívat své nástroje.

Závěr

V této práci jsme se pokusili podat základní přehled analytických nástrojů evoluční teorie her a ilustrovat možné způsoby jejího využití při zkoumání zákonitostí reálné ekonomiky.

V rámci statické analýzy jsme ukázali, že je-li strategie evolučně stabilní, pak musí tvořit symetrickou Nashovou rovnováhu. Kromě toho by měla být odolná vůči evolučním tlakům v podobě invazí mutantských strategií v dostatečně malém množství. Kritéria pro evoluční stabilitu jsou tedy náročnější než pro Nashovu rovnováhu, proto koncept ESS představuje zjemnění (refinement) Nashovy rovnováhy.

Pro dynamickou analýzu je chování systému v dlouhém období dáno selekčním mechanismem, který má podobu určité dynamiky. V naší práci jsme uvedli nejčastěji používaný typ populační dynamiky, tzv. replikátor dynamiky, který reflektuje myšlenku Darwinovské selekce. Narozdíl od statické analýzy dynamická analýza disponuje dvěma koncepty: evoluční rovnováhou a evolučním ohniskem. Stejně jako v případě ESS, i zde platí, že jak evoluční rovnováha, tak evoluční ohnisko musí být symetrickou Nashovou rovnováhou. Protože evoluční rovnováhu tvoří takové Nashovy rovnováhy, které jsou stabilní čase, představuje tento rovnovážný koncept evoluční dynamiky zjemnění Nashovy rovnováhy. Klíčovým znakem jak statické, tak dynamické analýzy je ten, že obě analýzy nevyžadují žádné předpoklady ohledně racionality hráčů.

Evoluční teorie her tedy rozšířila statický koncept Nashovy rovnováhy o dynamický rozměr. Tato dynamizace nám umožňuje lépe prozkoumat a tudíž i porozumět stabilitě rovnovážných stavů a selekčním mechanismům, prostřednictvím kterých jednotlivci při vzájemných interakcí dospějí k určitému rovnovážnému stavu. Zjištění, že každá evoluční rovnováha (asymptoticky stabilní stacionární bod) dynamické analýzy a každá evolučně stabilní strategie statické analýzy je Nashovou rovnováhou, potvrzuje, že upustíme-li od předpokladu dokonalé racionality hráčů, pak výsledek, ke kterému hra dospěje, bude Nashovou rovnováhou.

Tento závěr je v naší práci zásadní, neboť potvrzuje univerzální platnost Nashovy rovnováhy jako klíčového rovnovážného konceptu při řešení situací a konfliktů v oblasti nekooperativních her, ať už jsou předpoklady ohledně racionality hráčů jakékoliv.

Ačkoliv nevěříme, že trhy jsou vždy v rovnováze, že firmy vždy maximalizují zisk nebo že hráči jsou vždy racionální, přesto zaměřujeme pozornost na zkoumání rovnovážného chování. A to z důvodu, že doufáme, že jeho zkoumání nám přinese osvětlení či lepší pochopení zákonitostí lidské společnosti, nebo právě vysvětlí příčiny vzniku nerovnovážných situací.

Evoluční teorie her v tomto směru výrazně přispěla nejen tím, že potvrdila významnost Nashovy rovnováhy, ale také tím, že poskytla selekční mechanismus, který v případě existence více Nashových rovnováh mezi nimi vybírá tu, která je stabilní v dlouhém období. Kromě toho, dynamická analýza dává na výběr bohatší možnosti než jen evoluční rovnováhu, neboť i Nashova rovnováha, která není evolučně stabilní, pokud je evolučním ohniskem, může být velmi užitečná. A to z důvodu, že nám dává informace o tom, v jaké oblasti či v jakém rozmezí se bude pohybovat výsledek v dlouhém období.

Avšak tak jako každá teorie, i evoluční teorie her má svoji stinnou stránku. Metodologická různorodost dynamických procesů nám na jedné straně poskytuje flexibilní rámec, do kterého spadá řada strategických přizpůsobovacích procesů jako např. učení, imitace, adaptace, uspokojování či populační reprodukce, na straně druhé jejich struktura bývá mnohdy natolik komplikovaná, že vyžadují poměrně hluboké matematické znalosti, aby mohly být používány na vyšší úrovni. Na obranu lze však říci, že jednoduché a přehledné modely těžko zachytí komplexnost a specifičnost zkoumaných situací.

Závěrem dodejme, že důležitým znakem evoluční teorie her je ten, že kromě základního předpokladu selekce, kdy zjevně úspěšnější formy chování zvyšují svoji četnost výskytu v populaci oproti méně úspěšným formám, evoluční dynamika nenese v sobě *žádné předpoklady ohledně chování* či racionalitě hráčů. Tato skutečnost podstatným způsobem rozšiřuje oblast působení evoluční teorii her, která tak může vysvětlit nejen vzorce chování omezeně racionálních (či naprosto pasivních) hráčů, ale také některé preference dokonale racionálních hráčů. To je významná výhoda oproti behaviorální ekonomii.

Literatura

BALKENBORG, Dieter – SCHLAG, Karl H. (1998): *Evolutionary Stability in Asymmetric Population Games*. Discussion Paper Serie B, No. 314. 1998. University of Bonne, Germany.

BASU, Kaushik (1995): Civil Institutions and Evolution: Concepts, Critique and Models. Journal of Development Economics, Vol. 46, 1995, pp. 19-33.

BOWLES, Samuel (1998): *Endogenous Preferences: The Cultural Consequences of Markets and Other Economic Institutions*. Journal of Economic Literature, Vol. 36, No.1., 1998, pp. 75-111.

CORNELL, Bradford – ROLL, Richard (1981): *Strategies for Pairwise Competition in Markets and Organizations*. The Bell Journal of Economics, Vol. 12, No. 1., 1981, pp. 201-213.

CRESSMAN, Ross – MORRISON, William G. – WEN, Jean-François (1998): *On the Evolutionary Dynamics of Crime*. The Canadian Journal of Economics, Vol. 31, No. 5., 1998, pp. 1101-1117.

d'ARTIGUES, Agnes – VIGNOLO, Thierry (2003): *Why Global Integration May Lead to Terrorism: An Evolutionary Theory of Mimetic Rivalry*. Economic Bulletin, Vol. 6, No. 11, 2003, pp. 1-8.

DEMICHELIS, Stefano – RITZBERGER, Klaus (2003): *From Evolutionary to Strategic Stability*. Journal of Economic Theory, Vol. 113, 2003, pp. 51-75.

ESHEL, Ilan (2005): *Asymmetric Population Games and the Legacy of Maynard Smith: From Evolution to Game Theory and Back?* (*In Memory of Maynard Smith*). Theoretical Population Biology, Vol. 68, 2005, pp. 11-17.

FRIEDMAN, Daniel (1991): *Evolutionary Games in Economics*. Econometrica, Vol. 59, 1991, pp. 637 – 666.

FRIEDMAN, Daniel (1996): *Equilibrium in Evolutionary Games: Some Experimental Results*. The Economic Journal, Vol. 106, 1996, pp. 1 – 25.

FRIEDMAN, Daniel (1998): *On Economic Application of Evolutionary Game Theory*. Journal of Evolutionary Economics, Vol. 8, 1998, pp. 15 – 43.

GINTIS, Herbert (2000): *Game Theory Evolving: A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey.

GRAFEN, Alan (1987): *The logic of divisively asymmetric contests: respect for ownership and the desperado effect. Animal Behaviour*, Vol. 35, 1987, pp. 462-467.

HÁJKOVÁ, Vladimíra – JOHN, Oldřich – ZELENÝ, Miroslav (2000): *Matematika*. Univerzita Karlova v Praze - Nakladatelství Karolinum, Praha.

JOHN, Oldřich – KALENDA, Ondřej F. K. – ZELENÝ, Miroslav (2003): *Matematika (pokračování)*. MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

KANDORI, Michihiro – MAILATH, Gerge J. – ROB, Rafael (1993): *Learning, Mutation, and Long Run Equilibria in Games*. Econometria, Vol. 61, No. 1., 1993, pp. 29-56.

KRNEC, Jiří (2003): *Teorie her a její využití v politologii*, Diplomová práce UK FSV.

MAILATH, George J. (1998): *Do People Play Nash Equilibrium? Lessons from Evolutionary Game Theory*. Journal of Economic Literature, Vol. 36, No. 3., 1998, pp. 1347-1374.

MAŇAS, Miroslav (1983): *Teorie her a její ekonomické aplikace*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.

MAREŠ, Milan (2003): *Principy strategického chování*. Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha.

MATSUI, Akihiko (1996): *On Cultural Evolution: Social Norms, Rational Behavior, and Evolutionary Game Theory*. Journal of the Japanese and International Economies, Vol. 10, 1996, pp. 262-294.

MAYNARD, Smith J. – PRICE, G. R. (1973): *The Logic of Animal Conflict.* Nature, Vol. 246, 1973, pp. 15 – 18.

MOLANDER, Per (1992): *The Prevalence of Free Riding*. The Journal of Conflict Resolution, Vol. 36, No. 4., 1992, pp. 756-771.

OSBORNE, Martin J. – Rubistein, Ariel (1994): *A Course in Game Theory*. The MIT Press, Cambridge.

OSBORNE, Martin J. (2004): *An Introduction to Game Theory*. Oxford University Press, Oxford.

PITCHIK, Carolyn – SCHOTTER, Andrew (1987): *Honesty in a Model of Strategic Information Transmission*. The American Economic Review, Vol. 77, No. 5., 1987, pp. 1032-1036.

RITZBERGER, Klaus – WEIBULL, Jorgen W. (1995): *Evolutionary Selection in Normal-Form Games*. Econometria, Vol. 63, No. 6., 1995, pp. 1371-1399.

SAMUELSON, Larry (2002): *Evolution and game theory*. The Journal of Economic Perspectives, Vol. 16, No. 2, 2002, pp. 47 – 66.

SIGMUND, Karl – NOWAK, Martin A. (1999): *Evolutionary Game Theory*. Current Biology, Volume 9, 1999, pp. R503-R505.

SIRŮČEK, Pavel (2002): *Pojetí člověka a racionality v ekonomických teoriích*. Marathon, No.2/2002.

SLOTH, Birgitte – WHITA-JACOBSEN, Hans Jørgen (2006): *Economic Darwinism*. CIE Discussion Papers from University of Copenhagen, No. 2006-01.

Van DAMME, Eric (1994): *Evolutionary Game Theory*. European Economic Review, Vol. 38, 1994, pp. 847-858.

Van der LAAN, Gerard – TIEMAN, Xander (1996): *Evolutionary Game Theory and the Modeling of Economic Behavior*. Tinbergen Istitute Discussion Papers, No. 96-172/8

VANDERSCHRAAF, Peter (1999): *Game Theory, Evolution, and Justice*. Philosophy and Public Affairs, Vol. 28, No. 4., 1999, pp. 325-358.

VARIAN, Hal R. (1995): *Mikroekonomie. Moderní přístup.* Victoria Publishing, a.s., Praha.

VEGA-REDONDO, Fernando (2003): *Economics and the Theory of Games*. Cambridge University Press, Cambridge.

VINCENT, Thomas L. – BROWN, Joel S. (1988): *The Evolution of ESS Theory. Annual Review of Ecology and Systematics,* Vol. 19, 1988, pp. 423-443.

YOUNG, Peyton H. (1993): *The Evolution of Conventions.* Econometria, Vol. 61, No. 1., 1993, pp.57-84.

Abstract

An Introduction to Evolutionary Game Theory

The paper discusses the main set of analytical concepts establishing evolutionary game theory with two objectives. Our first objective is to show that evolutionary game theory provides support for Nash equilibrium even if the assumption of perfect rationality is released. Our second objective is to demonstrate the applicability of evolutionary game theory to economic issues.

Evolutionary game theory combines the static concept of Evolutionary Stable Strategy or State with the dynamic concept of replicator dynamics. We start with the static analysis where the ESS concept is presented in contrast with the chief theoretical notion of classical game theory, Nash equilibrium.

We then continue with dynamic analysis, where the equilibrium concept is enriched by the concept of evolutionary focal point. In both analyses we come to the conclusion, that evolutionary equilibrium concepts are refinements of the Nash equilibrium, where the ESS concept is asymptotically stable with respect to the replicator dynamics and thus represents the stricter refinement.

Further, we extend evolutionary stability concepts to the situation of asymmetric games. This case involves two populations, where each population represents an (economically) distinct role.

To demonstrate the applicability of evolutionary game theory to economic issues, we introduce two models of economic interaction. In the first model we interpret d'Artigues and Vignolo (2003)'s model, who study the emergence of the recent form of terrorism using evolutionary game theory. The second application deals with the model of Cressman, Morrison a Wen (1998), who examine the economics of crime deterrence from an evolutionary perspective.

The last section is addressed to the areas of application, where in our opinion evolutionary game theory provides us a better insight.

Abstrakt

Úvod do evoluční teorie her

V této práci se pokusíme podat základní přehled evoluční teorie her s dvěma cíly. Za první cíl si klademe ukázat, že upustíme-li od požadavku dokonalé racionality hráčů, výsledek, k němuž hra evolucí nakonec dospěje, je Nashovou rovnováhou. Naším druhým cílem je demonstrovat, jakým způsobem lze využít koncepty a nástroje evoluční teorie her k analýze některých problematik soudobé ekonomie.

Protože evoluční teorie her kombinuje statický koncept evolučně stabilní strategie a dynamický koncept replikátoru dynamiky, obsahem první kapitoly je statická analýza, ve které rozvedeme základní vlastnosti rovnovážného konceptu evolučně stabilní strategie a její vztah k Nashově rovnováze. V druhé kapitole se budeme věnovat dynamické analýze, kde představíme klasický model evoluční dynamiky, tzv. replikátor dynamiky. V obou analýzách docházíme k závěru, že koncepty ESS a evoluční rovnováhy představují zjemnění Nashovy rovnováhy. Ve třetí kapitole rozšíříme rovnovážné koncepty evoluční teorie her pro situaci asymetrických her, které modelují interakce mezi jedinci dvou populací s odlišnými (ekonomickými) rolemi. Čtvrtá a pátá kapitola budou věnovány aplikacím.

Projekt bakalářské práce

Termín bakalářské zkoušky: **letní semestr 2005/2006**
Autor bakalářské práce: **Vu Phuong Thuy**
Vedoucí bakalářské práce: **PhDr. Martin Gregor**

Téma: Evoluční teorie her a její aplikace v ekonomii

Hypotéza: Cílem práce bude zevrubné zkoumání možnosti uplatnění evoluční teorie her při řešení aktuálních problémů dnešní ekonomie. Práce bude rozdělena do dvou částí – v první části bude uveden základní přehled analytických nástrojů a teorií, na kterých staví evoluční teorie her, zatímco v druhé části budou presentovány několik vybraných aplikací této teorie v různých oblastech ekonomie.

Osnova:
1. Základní pojmy a vymezení evoluční teorie her
2. Statická analýza
3. Základní dynamická analýza
4. Evoluce v sociálním prostředí
5. Aplikace v ekonomii
6. Zhodnocení přínosu evoluční teorie her

Literatura:

Martin J. Osborne (2004): *An introduction to Game Theory*, New York, Oxford, Oxford University Press
Fernando Vega-Redondo (2003): *Economics and the Theory of Games*, Cambridge University Press
J. Weibull (1995): Evolutionary game theory, Cambridge: MIT Press
Game theory, experience, rationality: foundations of social sciences, economics and ethics: in honour of John C. Harsnayi; edited by Werner Leinfellner and Eckehart Köhler, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (1998)
Martin J. Osborne, Ariel Rubistein (1994): *A course in game theory*, Cambridge: MIT Press
Frans Pieter de Vries (2003): Enviromental policy and technology diffusion under imperfect competition: An evolutionary game theoretical approach, Groningen: Rijksuniversiteit Groningen
Robert J. Aumann (2002): *Handbook of game theory: with applications*, Amsterdam, NY [US] : Elsevier
Daniel Friedman (1998): *On economic applications of evolutionary game theory*, Journal of Evolutionary Economics
Jiří Krnec (2003): *Teorie her a její využití v politologii*, Diplomová práce UK FSV
Journal of Evolutionary Economics (elektronický zdroj)

V Praze dne ……………

Podpis vedoucího bakalářské práce Podpis autora