UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA SOCIÁLNÍCH VĚD

Institut ekonomických studií

Václav Franče

Ramsey-Cass-Koopmansův model a metody variačního počtu

Bakalářská práce

Praha 2008

Autor práce: **Václav Franče**
Vedoucí práce: **Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.**
Oponent práce:
Datum obhajoby: **2008**
Hodnocení:

Bibliografický záznam

FRANČE, Václav. *Ramsey-Cass-Koopmansův model a metody variačního počtu.* Praha: Univerzita Karlova, Fakulta sociálních věd, Institut ekonomických studií, 2008. 37 s. Vedoucí bakalářské práce Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Anotace

Hlavním cílem této práce je seznámit se s matematicky exaktní analýzou Ramsey-Cass-Koopmansova modelu (RCK model). Nejprve se tato práce zabývá základními výsledky Solowova modelu. RCK model totiž rozvíjí původní Solowův model, a tedy jsou výsledky Solowova nutným předpokladem pro další analýzu RCK modelu. Poté budeme aplikovat metody variačního počtu na optimalizační úlohu, kterou se zabývá RCK model. V neposlední řadě budeme studovat dynamické chování ekonomiky RCK modelu s pomocí kvalitativní analýzy soustav diferenciálních rovnic. Metody této práce jsou jakýmsi kompromisem mezi metodami běžných učebnic makroekonomie a metodami původních článků zabývajících se RCK modelem. Na druhou stranu je kladen důraz na to, aby matematická korektnost původních článků zůstala zachována i v této práci.

Annotation

The main goal of this thesis is to acquaint with a mathematically correct analysis of the Ramsey-Cass-Koopmans model (RCK model). Firstly, this thesis investigates some basic results of the Solow model. The RCK model develops the original Solow model, therefore the results of the Solow model are necessary for the next analysis of the RCK model. Secondly, we will apply the calculus of variations to the optimization problem defined by the RCK model. Last but not least, we will study the dynamics of the economy of the RCK model with the help of qualitative analysis of systems of differential equations. Methods of this thesis are such a compromise between methods in current textbooks of macroeconomics and methods in original papers dealing with the RCK model. On the other hand, in this thesis there is an effort for sustaining of mathematical correctness of original papers.

Klíčová slova

Ramsey-Cass-Koopmansův model, Solowův model, hospodářský růst, variační počet, soustavy diferenciálních rovnic

Keywords

Ramsey-Cass-Koopmans model, Solow model, economic growth, calculus of variations, systems of differential equations

Prohlášení

1. Prohlašuji, že jsem předkládanou práci zpracoval samostatně a použil jen uvedené prameny a literaturu.
2. Souhlasím s tím, aby práce byla zpřístupněna veřejnosti pro účely výzkumu a studia.

V Praze dne 2. 6. 2008 Václav Franče

Poděkování

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu práce Doc. RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D. za veškerou pomoc, které se mi od něj dostalo.

Obsah

Úvod

Cíl práce a volba metodologie

Cílem této práce je seznámit se s matematicky exaktní analýzou *Ramsey-Cass-Koopmansova modelu* (dále jen RCK model). Tato práce se snaží, je-li to možné, sledovat výklad RCK modelu i značení v rozšířené učebnici pokročilé makroekonomie (Romer, 2006). Na druhou stranu jsou však při výkladu RCK modelu použity i pokročilejší metody matematické analýzy, které běžné učebnice pokročilé makroekonomie neobsahují. Autor má na mysli zejména variační počet a v menší míře také kvalitativní analýzu soustav diferenciálních rovnic. Důraz je také kladen na ověření předpokladů, kterými jsou tyto metody podmíněny.

Tato práce však také bere v potaz původní články, na jejichž základě RCK model vznikl. Konkrétně se jedná o tyto práce (Ramsey, In: Stiglitz, Uzawa 1969; původní článek však pochází z roku 1928), (Cass, 1965) a (Koopmans, 1965). Nicméně metody v nich použité (zejména teorie optimálního řízení) svoji náročností převyšují možnosti této práce. Autorovým cílem je tedy vytvořit určitý kompromis mezi analyticky náročnými metodami, které byly použity v původních článcích, a matematicky ne zcela korektními metodami, které používají běžné učebnice makroekonomie. Přičemž je kladen důraz na to, aby matematická korektnost originálních článků zůstala zachována i v této práci.

Autor bude při výkladu RCK modelu sledovat následující strukturu. V první kapitole budou odvozeny základní výsledky *Solowova modelu*, které jsou nezbytné pro další analýzu RCK modelu. RCK model totiž rozvíjí původní Solowův model, a proto je vhodné se o Solowově modelu alespoň stručně zmínit. Druhá kapitola již bude obsahovat vlastní analýzu RCK modelu. Nejprve pomocí metod variačního počtu nalezneme optimální trajektorie veličin, které RCK model zkoumá, a posléze pomocí kvalitativní analýzy soustav diferenciálních rovnic zjistíme jejich chování v čase. V závěru pak shrneme hlavní výsledky RCK modelu.

Hospodářský růst

Snaha vysvětlit obrovské rozdíly bohatství v čase a v prostoru pomocí modelů hospodářského růstu provází ekonomickou teorii celou její moderní historií. Ač důležitost krátkodobého výkonu ekonomiky vystihl např. J. M. Keynes, je zřejmé, že modely zkoumající cyklické výkyvy ekonomiky okolo potenciálního produktu nemohou vysvětlit rozdíly bohatství v prostoru a v čase, kterých jsme byli za poslední dvě století svědky. Modely hospodářského růstu jsou přitažlivější tím spíše, že i malý rozdíl v trendovém růstu může v dlouhém období vyvolat značné rozdíly v konečném bohatství. Tento fakt proto vysvětluje zájem, který ekonomická teorie věnovala studiu příčin, které rozdíly v trendovém růstu jednotlivých zemí vyvolávají. Takový zájem je vlastní i této práci.

Z představitelů klasické politické ekonomie se modelům hospodářského růstu věnovali např. D. Ricardo, T. R. Malthus a A. Smith. Později došlo také k rozvoji modelů hospodářského růstu na neoklasické bázi. Nejznámější z nich je Solowův model růstu, který je okrajově zkoumán i v této práci. Avšak pro nás nejzajímavějším neoklasickým modelem růstu je v tuto chvíli pochopitelně RCK model. Mezi další ekonomy, kteří rozvinuli neoklasickou teorii růstu se řadí Ch. W. Cobb, P. H. Douglas, R. Lucas a další. Stranou při vývoji modelů hospodářského růstu nezůstali ani keynesiánští ekonomové. Z neokeynesiánské větve jmenujme např. R. F. Harroda, E. D. Domara, P. A. Samuelsona či J. Tobina a z postkeynesiánských ekonomů J. V. Robinsonovou a N. Kaldora, kteří (mimo jiné) stavěli na pracích M. Kaleckého. Svébytnou teorii hospodářského růstu spojenou s vizí dalšího vývoje kapitalismu vytvořil J. Schumpeter.

Kapitola 1

Solowův model hospodářského růstu

Před zahájením vlastního výkladu o Solowově modelu růstu je vhodné učinit jednu metodickou poznámku. Autorovým záměrem není na následujících řádcích poskytnout čtenáři vyčerpávající výklad Solovowa modelu, protože to není předmětem této práce. V této kapitole se čtenáři dostane odvození základních výsledků Solowova modelu, které jsou nezbytné pro další výklad RCK modelu.[1]

1.1 Předpoklady modelu

1.1.1 Produkční funkce

Jelikož Solowův model růstu zkoumá vývoj potenciálního HDP, musí být produkt dané ekonomiky vždy na hranici jejích produkčních možností. To znamená, že $Y = F(K, AL)$, kde F je *produkční funkce* dané ekonomiky. Jako první výrobní faktor, tj. jako první proměnná produkční funkce F, vystupuje *kapitál*. Ten je v Solowově modelu funkcí času ($t \mapsto K(t)$). Konkrétní funkční hodnota funkce K v čase t určuje množství kapitálu v ekonomice v daném čase. Druhým výrobním faktorem je tzv. *efektivní práce*, tj. součin populace dané ekonomiky L a efektivity práce A. To znamená, že pro velikost konečného

[1] Možným zdrojem informací o Solowově modelu je např. (Roomer, 2006).

produktu není podstatné, zda-li se např. dvakrát zvýší populace nebo dvakrát zvýší efektivita práce, celkový produkt se totiž v obou případech zvýší stejně. Populace dané ekonomiky a efektivita práce jsou opět funkcí času ($t \mapsto A(t)$, $t \mapsto L(t)$). Množství efektivní práce v čase t je tedy součinem $A(t)$ a $L(t)$. Předpoklad $Y = F(K, AL)$ tedy znamená, že veškerý kapitál a veškeré množství efektivní práce v ekonomice je využito k tvorbě výstupu. Neexistuje tedy nevyužitý kapitál ani nezaměstnanost, což odpovídá předpokladu zkoumání vývoje potenciálního HDP, kdy neuvažujeme jednotlivé cyklické výkyvy dané ekonomiky. Také Y je funkcí času. Hodnota funkce $t \mapsto Y(t)$ v čase t závisí na času prostřednictvím hodnot K a AL. Příslušný funkční vztah vypadá následovně

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)).$$

Produkční funkce F v Solowově modelu je neoklasická agregátní produkční funkce. Tj. produkční funkce dvou proměnných, kde jako první proměnná vystupuje celkové množství kapitálu v ekonomice a jako druhá proměnná celkové množství efektivní práce. Možnost agregace kapitálu je zajištěna předpokladem homogenity kapitálových statků.

V případě uvažování realističtějšího předpokladu nehomogenity kapitálových statků bychom se museli potýkat s fenoménem zvaným neměřitelnost kapitálu, který je znám z postkeynesiánské ekonomie (viz např. Holman, 1999). Potom totiž k agregaci kapitálu je nezbytné použít ocenění kapitálových statků pomocí úrokové míry. Úrokovou míru však apriorně neznáme, je třeba ji vypočíst za pomoci produkční funkce, k čemuž však potřebujeme znát množství kapitálu. Tím vzniká jakýsi „bludný kruh“, který by nám v lepším případě ztížil použití výše zmíněné produkční funkce F. Abychom se vyhnuli podobným komplikacím, budeme vycházet ze zjednodušujícího předpokladu homogenity kapitálových statků.

Nechť symbol $\partial_i F$ značí parciální derivaci funkce F podle i-té proměnné a symbol $\partial^2_{ij} F$ parciální derivaci druhého řádu funkce F, kde nejdříve derivujeme podle i-té a poté podle j-té proměnné. Na produkční funkci F potom klademe tyto požadavky:

(A1) $F(0, x) = F(y, 0) = 0$, kde $x \geq 0$, $y \geq 0$. Tato vlastnost funkce F znamená, že oba výrobní faktory jsou nepostradatelné.

(A2) $F \in \mathcal{C}^2\left((0,+\infty)\times(0,+\infty)\right)$.

(A3) $\partial_1 F > 0$, a tedy funkce F je rostoucí v první proměnné. Tato matematická vlastnost produkční funkce odpovídá ekonomickému předpokladu kladného *mezního produktu kapitálu* (MPK).

(A4) $\partial_2 F > 0$. Analogicky k prvnímu předpokladu je kladný také *mezní produkt efektivní práce* ($MPAL$).

(A5) $\partial_{11}^2 F < 0$, a tedy funkce F je ryze konkávní v první proměnné, což odpovídá předpokladu klesajícího MPK.

(A6) $\partial_{22}^2 F < 0$. Obdobně je klesající také $MPAL$.

(A7) $F(l\cdot x, l\cdot y) = l\cdot F(x,y)$ pro všechna $l > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Funkce F je tedy lineárně homogenní v obou proměnných (matematický pohled). To znamená, že daná ekonomika vykazuje konstantní výnosy z rozsahu (ekonomický pohled).

Předpoklad (A7), ač v reálném světě nebývá vždy splněn[2], nám umožňuje převést složitější problém zkoumání veličiny K na jednodušší problém zkoumání veličiny k, která je definovaná vztahem $k = \frac{K}{AL}$ a vyjadřuje *kapitál na jednotku efektivní práce*. Ten je opět funkcí času ($t \mapsto k(t)$). Pro zkoumání funkce k je vhodné zavést modifikovanou produkční funkci $k \mapsto f(k)$. Za tímto účelem si nejprve upravme produkční funkci F. Platí-li $AL \neq 0$, pak můžeme přepsat funkci F následovně

$$F(K, AL) = F\left(K\cdot\frac{AL}{AL}, \frac{(AL)^2}{AL}\right) = AL\cdot F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = AL\cdot F(k,1).$$

První rovnost je zjevná, druhá využívá lineární homogenity funkce F a třetí používá definici k. Vyjádřeme si nyní výraz $F(k,1)$ v závislosti na $F(K,AL)$. Funkce f je potom definovaná následovně

$$f(k) = F(k,1) = \frac{1}{AL}F(K,AL). \tag{1.1}$$

[2]Tento model pro jednoduchost nebere v úvahu přírodní zdroje jakožto výrobní faktor. Za předpokladu vzácnosti přírodních zdrojů by totiž l-násobné zvýšení množství kapitálu a efektivní práce vedlo k méně než l-násobnému zvýšení výstupu.

Jestliže platí $Y = F(K, AL)$, pak $f(k) = \frac{Y}{AL}$. Výraz $\frac{Y}{AL}$ můžeme označit y a interpretovat jako *výstup na jednotku efektivní práce.*

Vyjádřeme ze znalosti vlastností funkce F některé vlastnosti funkce f.

(B1) $f(0) = 0$. Tato vlastnost vychází z předpokladu nepostradatelnosti kapitálu jakožto výrobního faktoru. Podle vlastnosti (A1) totiž platí $f(0) = \frac{1}{AL}F(0, AL) = 0$.

(B2) $f'(k) > 0$. Tato vlastnost odpovídá předpokladu kladného MPK. O její platnosti se můžeme přesvědčit spočtením $f'(k)$ s pomocí „řetízkového pravidla" pro derivaci funkcí více proměnných

$$f'(k) = \partial_1 F(k, 1) \cdot 1 + \partial_2 F(k, 1) \cdot 0 = \partial_1 F(k, 1) > 0.$$

(B3) $f''(k) < 0$. Tato vlastnost je analogií k předpokladu klesajícího MPK. Při jejím dokazování využijeme odvozené rovnosti $f'(k) = \partial_1 F(k, 1)$ a opět použijeme „řetízkové pravidlo"

$$f''(k) = \partial^2_{11} F(k, 1) \cdot 1 + \partial^2_{12} F(k, 1) \cdot 0 = \partial^2_{11} F(k, 1) < 0.$$

Následující dva předpoklady přidává většina autorů k prvním třem. Cílem předpokladu (B4) je vyjádřit, že MPK je „velmi vysoký" pro malé hodnoty k, naopak podle předpokladu (B5) je „velmi malý" pro vysoké hodnoty k. Tyto vlastnosti jsou důsledkem jednoho ze základních ekonomických zákonů, zákonu klesajících výnosů. Podle něj s rostoucím množstvím variabilního faktoru (v tomto případě kapitál), který je přidáván k fixnímu faktoru (efektivní práce), dochází postupně k poklesu výnosů.

Jelikož exaktní matematická analýza se jen těžko může spokojit s vágními pojmy „velmi vysoký" a „velmi malý", je vhodné se této nejednoznačnosti vyhnout zformulováním následujících limitních vlastností.

(B4) $\lim_{k \to 0+} f'(k) = +\infty$.

(B5) $\lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0$.

1.1.2 Ostatní předpoklady

V části 1.1.1 bylo řečeno, že populace ekonomiky a efektivita práce je funkcí času, nicméně přesný funkční vztah nebyl explicitně uveden. Funkční vztahy pro populaci a produktivitu práce jsou v tomto modelu následující.

1. $A(t) = A(0)e^{gt}$; tj. efektivita práce roste konstantní exogenní mírou g,

2. $L(t) = L(0)e^{nt}$; tj. pracovní síla roste konstantní exogenní mírou n.

Jinak řečeno n a g jsou exogenní proměnné a Solowův model je tedy nemá ambici nijak vysvětlovat.

Dalším klíčovým předpokladem Solowova modelu je konstantní míra úspor s $(0 < s < 1)$. Tento předpoklad vyžaduje, aby v každém čase byla uspořena a následně investována konstantní část výstupu. Nechť funkce $t \mapsto c(t)$, kde $c(t) > 0$, vyjadřuje *spotřebu na jednotku efektivní práce*, potom můžeme tento požadavek shrnout v následující rovnici

$$f(k(t)) - c(t) = sy(t) \tag{1.2}$$

pro všechna $t > 0$.

Solowův model se řadí mezi neoklasické modely. Vychází proto z předpokladu dokonalé konkurence. Celá ekonomika se skládá z velkého množství firem, jejichž vzájemná konkurence stlačí ceny vstupů až na hodnotu jejich mezního produktu. Tuto skutečnost můžeme zapsat následovně

$$\begin{aligned} r(t) &= MPK(t) = \partial_1 F(K(t), A(t)L(t)), \\ w(t) &= MPAL(t) = \partial_2 F(K(t), A(t)L(t)), \end{aligned}$$

kde funkce $t \mapsto r(t)$ vyjadřuje vývoj reálné úrokové míry v čase a funkce $t \mapsto w(t)$ vývoj reálné mzdy na jednotku efektivní práce v čase.

Jelikož jsme v (B2) odvodili, že $f'(k) = \partial_1 F(k, 1)$, a zároveň víme, že $r(t) = \partial_1 F(K(t), A(t)L(t))$, lze výše uvedený vztah pro $r(t)$ přepsat následovně

$$r(t) = f'(k(t)). \tag{1.3}$$

Analogický vztah pro $w(t)$ je

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)).$$

Ověření provedeme následujícím výpočtem, který se opírá o definici funkce f a o vlastnost (A7).

$$\begin{aligned}
w &= \partial_2 F(K, AL) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F(k, 1+h) - F(k,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)F(\frac{k}{1+h}, 1) - F(k,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)f\left(\frac{k}{1+h}\right) - f(k)}{h} \\
&= \frac{d}{dh}\left((1+h)\, f\left(\frac{k}{1+h}\right)\right)_{h=0} \\
&= \left(f\left(\frac{k}{1+h}\right) + (1+h)f'\left(\frac{k}{1+h}\right)\frac{-k}{(1+h)^2}\right)_{h=0} \\
&= f(k) - kf'(k). \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Solowův i RCK model předpokládají uzavřenou dvousektorovou ekonomiku (ve svých základních verzích). To především znamená, že spotřeba nemůže být v žádném čase vyšší než výstup $c(t) \leq f(k(t))$. Ekonomika si totiž nemůže půjčovat v zahraničí.

Posledním (a poněkud zjednodušujícím) předpokladem je neuvažování amortizace kapitálu. Toto zjednodušení má za cíl usnadnit výklad RCK a Solowova modelu.

1.2 Řešení modelu

Jak již bylo dříve řečeno, cílem Solowova modelu je zkoumat funkci k. Za tímto účelem vyjádříme její první derivaci podle času

$$\begin{aligned}
k'(t) &= \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right)' \\
&= \frac{K'(t)A(t)L(t) - K(t)(A'(t)L(t) + A(t)L'(t))}{A^2(t)L^2(t)} \\
&= \frac{K'(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)A'(t)}{A^2(t)L(t)} - \frac{K(t)L'(t)}{A(t)L^2(t)}.
\end{aligned}$$

Nebudeme-li uvažovat opotřebení kapitálu, promítne se jakákoliv změna investic do stejně velké změny kapitálu. Potom je tedy $K'(t)$ rovna $sY(t)$. Vzhledem k tomu, že $\frac{A'(t)}{A(t)} = g$ a $\frac{L'(t)}{L(t)} = n$, můžeme výše uvedený vztah pro $k'(t)$ přepsat následovně

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{sY(t)}{A(t)L(t)} - k(t)g - k(t)n \\ &= sf(k(t)) - (n+g)k(t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vztah (1.5) je klíčovou rovnicí Solowova modelu a umožní nám poměrně jednoduchým způsobem určit rovnovážnou úroveň kapitálu na jednotku efektivní práce. Jelikož s je podle předpokladů konstanta, jedná se o autonomní diferenciální rovnici. Položením $\Phi(k) = sf(k) - (n+g)k$ můžeme rovnici (1.5) přepsat na

$$k'(t) = \Phi(k(t)). \tag{1.6}$$

Nyní nalezneme stacionární řešení rovnice (1.6). Toho dosáhneme položením $\Phi(k) = 0$. Je-li totiž $\Phi(k_0) = 0$, pak konstantní funkce $t \mapsto k_0$ je řešením rovnice (1.6) na intervalu $t \in (0, \infty)$[3]. Výše zmíněným postupem tedy dostaneme

$$sf(k(t)) - (n+g)k(t) = 0.$$

Použitím rovnice (1.2) a vynecháním proměnné t (jedná se o stacionární řešení) obdržíme

$$c = f(k) - (n+g)k. \tag{1.7}$$

V tuto chvíli nám nejde o explicitní vyjádření rovnovážné úrovně k jako funkce ostatních faktorů (c,n,g), ale o vzájemný vztah rovnovážné úrovně c a k, tj. $c = c(k)$. Použitím první a druhé derivace podle k tedy můžeme vyšetřit průběh takové funkce. Spočítejme proto $c'(k)$ a $c''(k)$:

$$\begin{aligned} c'(k) &= f'(k) - (n+g), \\ c''(k) &= f''(k) < 0. \end{aligned}$$

[3]Nenulové stacionární řešení existuje za podmínek $\lim_{k\to 0+} f'(k) > \frac{n+g}{s}$ a $\lim_{k\to +\infty} f'(k) < \frac{n+g}{s}$, které jsou vzhledem k vlastnostem (B4) a (B5) splněné.

Položením $c'(k) = 0$ spočítáme globální maximum funkce c. Tato funkce je totiž ryze konkávní na celém svém definičním oboru, protože $c''(k) < 0$. Potom tedy bod, ve kterém je první derivace nulová, je jejím globálním maximem. Výše uvedeným požadavkům odpovídá bod k^{**}, pro který platí $f'(k^{**}) = n + g$.

Tento bod představuje úroveň kapitálu odpovídající tzv. *zlatému pravidlu Solowova modelu.* Při této úrovni kapitálu je rovnovážná úroveň spotřeby maximalizovaná. Později při výkladu RCK modelu zjistíme, že existuje také bod k^*, který někdy nazýváme úrovní kapitálu podle modifikovaného zlatého pravidla, což odpovídá na případnou otázku, proč značíme v souladu s (Romer, 2006) úroveň kapitálu podle zlatého pravidla k^{**}.

Na intervalu $(0, k^{**})$ je potom funkce c rostoucí a na $(k^{**}, +\infty)$ klesající. Abychom mohli znázornit průběh funkce c do diagramu, je vhodné dokázat následující lemma.

Lemma 1 *Nechť pro funkci* $h\colon \langle 0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ *platí:*

- $h \in \mathcal{C}^2(0, +\infty)$,
- $h' > 0$ *na* $(x^{**}, +\infty)$, *kde* $x^{**} \in (0, +\infty)$,
- $h(x^{**}) > 0$,[4]
- $h'' < 0$ *na* $(0, +\infty)$.

Potom existuje bod $\overline{x} > x^{**}$, *pro který platí* $h(\overline{x}) = 0$.

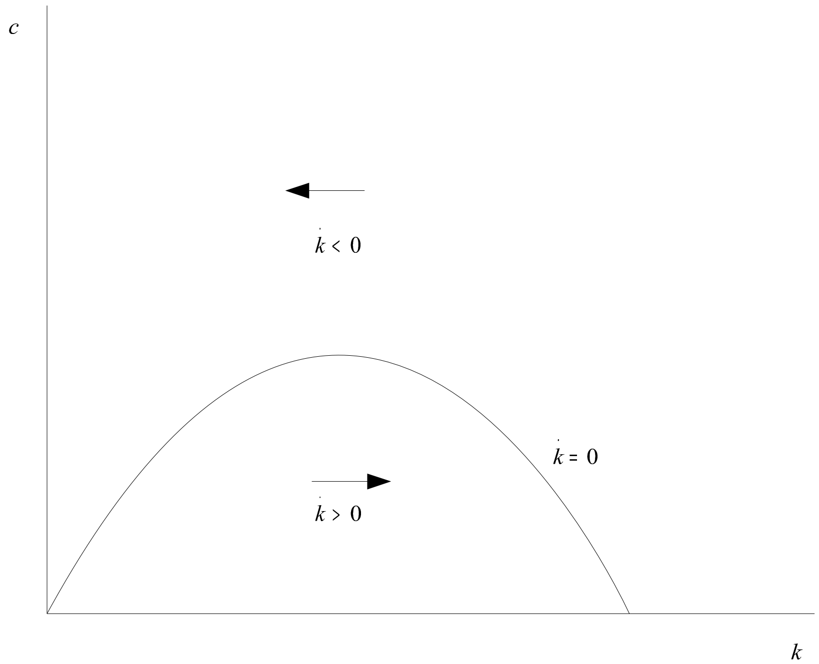
Důkaz. Podle předpokladů pro všechna $x \in (x^{**}, +\infty)$ platí $h'(x) < 0$ a $h''(x) < 0$. Zvolme $x_t \in (x^{**}, +\infty)$. Potom existuje přímka p, která je tečnou ke grafu funkce h v bodě x_t a jejíž směrnice je záporná. A tedy musí existovat bod $x_p \in (x^{**}, +\infty)$, který je průsečíkem přímky p a osy x. Funkce h je ryze konkávní, a proto její graf leží s výjimkou bodu $(x_t, h(x_t))$ pod přímkou p. Vzhledem ke spojitosti funkce h musí existovat bod $\overline{x} \in (x^{**}, x_p)$, pro který platí $h(\overline{x}) = 0$. ■

Aplikací Lemmatu 1 na funkci c dostaneme, že existuje bod $\overline{k} > k^{**}$, pro který platí $c(\overline{k}) = 0$. Tento bod z ekonomického hlediska představuje maximální dosažitelnou

[4] Hodnota $f(k^{**}) - (n + g)k^{**} > 0$ je kladná opět vzhledem k vlastnostem (B4) a (B5).

úroveň kapitálu. To je taková úroveň kapitálu, kdy veškerý výstup ekonomiky je uspořen a investován do tvorby kapitálu, a tedy spotřeba je nulová. Nulovost spotřeby v určitém časovém intervalu pochopitelně znamená vymření celé společnosti. Proto úroveň kapitálu $\overline{k}$ není reálně dosažitelná, ale z teoretického hlediska představuje užitečný nástroj k omezení kapitálu, výstupu a užitku (v RCK modelu) shora.

Doposud jsme se zabývali jen body na křivce určené rovnicí (1.7). Zbývá proto vyšetřit body $(c(t), k(t))$ nad resp. pod touto křivkou. Z rovnice (1.5) vyplývá, že pro body nad touto křivkou je $k'(t) < 0$ a pro body pod touto křivkou $k'(t) > 0$. Protože každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní (viz např. John, Kalenda, Zelený, 2003, kap. XIV. 4.), je funkce k rostoucí, je-li počáteční hodnota kapitálu $k(0)$ menší než hodnota stacionárního řešení, a klesající, je-li $k(0)$ větší než hodnota stacionárního řečení. Tuto skutečnost znázorníme v následujícím grafu.



Obrázek 1.1: Dynamika ekonomiky Solovova modelu

Problémem konvergence obecného řešení k rovnice (1.6) s počáteční podmínkou $k(0) \in (0, \overline{k})$ ke stacionárnímu řešení (tj. problémem konvergence ekonomiky do stálého stavu) se zde nebudeme zabývat, ačkoliv se jedná z ekonomického i matematického hlediska o zajímavý problém. V komplexnější podobě jej budeme řešit při analýze dynamického chování veličin RCK modelu.

Nyní zbývá si jen rozmyslet, jakých hodnot může stacionární řešení k nabývat. Teoreticky může nabývat libovolné hodnoty $k \in (0, \overline{k})$. Připustíme-li však určitou racionalitu společnosti, pak pro každou úroveň kapitálu $k_r \in (k^{**}, \overline{k})$ existuje úroveň $k_l \in (0, k^{**})$, pro kterou platí $c(k_l) = c(k_r)$. Společnost je tedy schopna dosáhnout v obou případech stejné úrovně spotřeby. Je zřejmé, že si za jinak stejných okolností vybere nižší úroveň kapitálu k_l. Jinak by totiž mohla snížením kapitálu z úrovně k_r na k_l dočasně zvýšit spotřebu nad rovnovážnou úroveň $c(k_l) = c(k_r)$.

Kapitola 2

Ramsey-Cass-Koopmansův model

Podle předchozí části věnované Solowově modelu růstu mohla rovnovážná úroveň kapitálu v závislosti na s (a jiných veličinách) nabývat libovolné hodnoty $k \in (0, k^{**}\rangle$. Míra úspor s je však exogenní proměnná a Solowův model ji nevysvětluje.

Je přirozené, že na tento „nedostatek" musela ekonomická teorie nějakým způsobem reagovat. Jedním z pokusů určení optimální výše úspor společnosti (a tedy i optimální úrovně kapitálu) je „pionýrský" článek F. P. Ramseyho (Ramsey, In: Stiglitz, Uzawa 1969). Jeho snahou je, zjednodušeně řečeno, nalezení optimální výše úspor společnosti pomocí metod variačního počtu, kdy se jednotlivé domácnosti snaží maximalizovat současnou hodnotu užitku ze své celoživotní spotřeby pomocí optimální alokace budoucího produktu mezi spotřebu a úspory. Pojem celoživotní spotřeba v sobě zahrnuje jak spotřebu jednotlivce žijícího konečný čas T, tak i spotřebu v nekonečném časovém horizontu; tj. spotřebitel bere v potaz nejen svoji budoucí spotřebu, ale i spotřebu svých potomků.

Na tento článek po určité době reagují D. Cass (Cass, 1965) a T. C. Koopmans (Koopmans, 1965), kteří podrobněji rozpracovali Ramseyho ideu a z jejichž článků se postupem času vyvinul model hospodářského růstu, který podrobněji rozvíjí původní Solowův model.

2.1 Předpoklady modelu

2.1.1 Produkční funkce ekonomiky

Výstup ekonomiky je dán produkční funkcí ve tvaru $Y = F(K, AL)$, jejíž vlastnosti jsou shodné s vlastnostmi produkční funkce v Solowově modelu. Stejně jako v Solowově modelu růstu je i zde vhodné pracovat s modifikovanou produkční funkcí $k \mapsto f(k)$.

Model opět předpokládá existenci velkého množství identických firem, které si navzájem konkurují, a tedy musejí nakupovat výrobní faktory za cenu rovnou jejich meznímu produktu. Tento předpoklad tedy znamená, že

$$MPK(t) = r(t) = f'(k(t))$$

a

$$MPAL(t) = w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)).$$

Pro odvození těchto vztahů viz část 1.1.2.

2.1.2 Užitková funkce

Model též předpokládá existenci velkého množství identických domácností. Jejich počet značíme H a je v čase konstantní; tj. nepředpokládá se odstěhování ani přistěhování žádných domácností. Přičemž velikost každé domácnosti roste v čase konstantním a exogenním růstem n. To nutně znamená, že velikost celkové populace roste tempem n a také že každý člen domácnosti je zaměstnán. Model tedy nebere v úvahu nezaměstnanost, jeho účelem je totiž vysvětlit růst potenciálního produktu nikoliv fluktuace skutečného produktu okolo potenciálu.

Veškeré firmy v ekonomice jsou vlastněny domácnostmi, a tedy problém maximalizace zisku firem je možné sloučit s problémem maximalizace užitku spotřebitelů. Navíc veškerý kapitál, se kterým jednotlivé firmy operují, musí patřit domácnostem. Označme si proto $K(0)$ počáteční množství kapitálu v ekonomice, potom počáteční kapitálová držba jednotlivých domácností je dána vztahem $\frac{K(0)}{H}$. Vlastnictví firem umožňuje domácnostem volit takové trajektorie spotřeby (a tedy i kapitálu podle vztahu $k' = f(k) -$

$c-(n+g)k$, který vznikl modifikací rovnice (1.5)) v čase, které maximalizují současnou hodnotu jejich celoživotního užitku. Takovou současnou hodnotu vyjadřuje funkcionál $C \mapsto U(C)$, který má následující tvar[1]

$$U(C) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} u(C(t)) \frac{L(t)}{H} \, dt. \tag{2.1}$$

Funkce L vyjadřuje velikost populace a zároveň množství pracovní síly v celé ekonomice v čase t. Podíl $\frac{L(t)}{H}$ tedy označuje počet jednotek práce nabízených každou domácností v čase t. Funkce C vyjadřuje vývoj spotřeby na pracovníka v čase. Konstanta $\rho > 0$ je diskontní míra. Výraz $u(\cdot)$ označuje užitkovou funkci. Proto rovnici (2.1) je možné interpretovat jako diskontovaný součet užitku z celoživotní spotřeby domácnosti.

Užitková funkce u: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ má následující tvar

$$u(x) = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}. \tag{2.2}$$

Kde konstanta $\theta \in (0, 1)$ vyjadřuje ochotu domácností přesouvat spotřebu v čase, a tedy čím vyšší bude, tím ochotněji budou spotřebitelé akceptovat výkyvy spotřeby v čase (viz např. Roomer, 2006, kap. 2).

Protože $u'(C(t)) = C(t)^{-\theta} > 0$ a $u''(C(t)) = -\theta C(t)^{-\theta-1} < 0$, splňuje takto zvolená užitková funkce požadavek, aby stejné zvýšení spotřeby ΔC vedlo k nižšímu přírůstku užitku pro vyšší úroveň spotřeby než pro nižší úroveň. Maximalizací takovéto užitkové funkce brání společnost poklesu spotřeby v nějakém budoucím časovém intervalu na „nepřiměřeně nízkou“ úroveň (viz Koopmans, 1965).

Dosazením vztahu (2.2) do rovnice (2.1) obdržíme

$$U(C) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L(t)}{H} \, dt. \tag{2.3}$$

Tento funkcionál však není zcela vhodný pro řešení problému spotřebitelského výběru. Stejně jako v Solowově modelu růstu si i zde usnadníme řešení převedením problému na jednotky efektivní práce. Vyjádřeme tedy výše uvedený funkcionál v jednotkách efektivní práce

[1] Veškeré integrály, které se v této práci vyskytnou, budou Newtonovy integrály.

$$
\begin{aligned}
U(C) &= \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L(t)}{H} \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{(A(0)e^{gt}c(t))^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L(0)e^{nt}}{H} \, dt \\
&= A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H} \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n-(1-\theta)g)t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \, dt \\
&= B \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \, dt. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Kde $B = A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H}$ a $\beta = \rho - n - (1-\theta)g$. Odvození rovnice (2.4) využívá vztahů $C(t) = A(t)c(t)$, $A(t) = A(0)e^{gt}$ a $L(t) = L(0)e^{nt}$.

Je vidět, že až na multiplikativní konstantu B je $U(C)$ rovno $V(c)$, kde $c \mapsto V(c)$ je analogický funkcionál pro trajektorii c definovaný vztahem

$$
V(c) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \, dt. \qquad (2.5)
$$

Problém maximalizace $V(c)$ je tedy obdobný jako maximalizace výrazu (2.4).

Je-li trajektorie c omezená, pak pro $\beta > 0$ je $V(c)$ konečné (viz Lemma 2). V případě $\beta \leq 0$ bychom se museli vypořádat s komplikací, kdy by spotřebitelé mohli dosahovat nekonečně velké úrovně užitku (viz Phelps, 1966).

Lemma 2 *Nechť trajektorie h je spojitá a splňuje $0 < h(t) \leq \overline{h}$ pro všechna $t \in (0, +\infty)$ a nechť funkcionál $h \mapsto G(h)$ je definován vztahem*

$$
G(h) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \chi(h(t)) \, dt,
$$

kde χ je rostoucí funkce, která je spojitá a nezáporná na $\langle 0, \overline{h} \rangle$. Potom pro každé $\alpha > 0$ je $G(h) \in \boldsymbol{R}$.

Důkaz. Tento důkaz vychází z důkazu omezenosti užitkové funkce v článku D. Casse (Cass, 1966, str. 836). Nejprve dokážeme existenci zkoumaného integrálu. Funkce $t \mapsto$

$e^{-\alpha t}\chi(h(t))$ je podle předpokladů nezáporná. Označme si ji φ. Nechť funkce Φ je k ní primitivní. Potom platí:

$$\Phi' = \varphi \geq 0.$$

Funkce Φ je tedy rostoucí, a tedy podle Věty o limitě monotónní funkce $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) \in \mathbf{R}\cup\{\infty\}$ a $\lim_{t\to 0+}\Phi(t) \in \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$. Tím jsme dokázali existenci zkoumaného integrálu.

Nyní zbývá dokázat jeho omezenost. Funkce h je podle předpokladů omezená a funkce χ rostoucí, a tedy platí

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\chi(h(t))\,dt \leq \chi(\overline{h})\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$$
$$= \frac{\chi(\overline{h})}{-\alpha}\left[e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty} = \frac{\chi(\overline{h})}{\alpha}\left(1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t}\right).$$

Jelikož podle předpokladu je $\alpha > 0$, pak $\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} = 0$, a tedy

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\chi(h(t))\,dt \leq \frac{\chi(\overline{h})}{\alpha}.$$

Analogickým postupem bychom dostali, že zdola je tento integrál omezen hodnotou $\frac{\chi(0)}{\alpha}$. Tím je tvrzení dokázáno. ■

Zbývá tedy ukázat omezenost c, abychom dokázali, že $V(c)$ je konečné. Ze Solowova modelu již víme, že $k(t) \leq \overline{k}$, a tedy $0 < c(t) \leq f(\overline{k})$.

2.1.3 Rozpočtové omezení

Domácnosti si pochopitelně nemohou vybírat libovolné trajektorie C, ale jsou při maximalizaci svého užitku omezeny rozpočtovým omezením, které jim dovoluje vybírat jen takové trajektorie, při kterých současná hodnota jejich budoucí spotřeby není vyšší než současná hodnota jejich budoucích příjmů navýšená o počáteční hodnotu jejich kapitálu. Rozpočtové omezení má proto tvar

$$\int_0^{+\infty} e^{-R(t)}C(t)\frac{L(t)}{H}\,dt \leq \frac{K(0)}{H} + \int_0^{+\infty} e^{-R(t)}W(t)\frac{L(t)}{H}\,dt. \tag{2.6}$$

Kde funkce W vyjadřuje vývoj reálné mzdy na pracovníka v čase, R je definována vztahem $R(t) = \int\limits_0^t r(s)\,ds$, kde r vyjadřuje průběh reálné úrokové míry v čase, a $\frac{K(0)}{H}$, jak bylo řečeno v části 2.1.2, představuje množství kapitálu vlastněné domácností v čase 0.

Jelikož užitková funkce (2.2) je rostoucí, rozpočtové omezení bude splněno jako rovnost. V opačném případě by totiž domácnosti mohly navýšením spotřeby v nějakém budoucím časovém intervalu zvýšit svůj celkový užitek, což by bylo ve sporu s racionalitou spotřebitelů. Racionální spotřebitel si totiž vždy vybírá při daných omezeních nejlepší variantu ve smyslu maximalizace užitku. Proto přepišme rozpočtové omezení (2.6) následovně

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-R(t)}(C(t) - W(t))\frac{L(t)}{H}\,dt = \frac{K(0)}{H}. \tag{2.7}$$

Stejně jako v případě užitkové funkce vyjádříme rozpočtové omezení v jednotkách efektivní práce

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} e^{-R(t)}(C(t) - W(t))\frac{L(t)}{H}\,dt &= \int\limits_0^{+\infty} e^{-R(t)}(c(t) - w(t))\frac{L(0)e^{nt}A(0)e^{gt}}{H}\,dt \\ &= \frac{k(0)A(0)L(0)}{H}.\end{aligned}$$

Vydělíme-li tento výraz číslem $\frac{A(0)L(0)}{H}$, tak obdržíme

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}(c(t) - w(t))\,dt = k(0). \tag{2.8}$$

Za předpokladu, že w a R jsou pevně dané funkce[2], lze rozpočtové omezení přepsat následovně

$$O(c) = k(0), \tag{2.9}$$

kde $O\colon \mathcal{C}^1(0, +\infty) \to \mathbf{R}$ je funkce, která trajektorii c přiřadí hodnotu $\int\limits_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}(c(t) - w(t))\,dt$.

[2]Tento předpoklad bude podrobně diskutován později.

2.2 Problém spotřebitelského výběru

2.2.1 Formulace problému

Vzhledem k tomu, že jsme pro $\beta > 0$ dokázali omezenost užitkové funkce, můžeme zformulovat problém spotřebitelského výběru, neboť bude nyní dobře definován.

Dáno:

- funkce $V\colon \mathcal{C}^1(0,+\infty) \to \mathbf{R}$, která je definovaná vztahem (2.5),
- funkce $O\colon \mathcal{C}^1(0,+\infty) \to \mathbf{R}$, která je definovaná vztahem (2.8),
- $k(0) \in (0, \overline{k})$.

Hledáme:

- funkci $c \in C^1(0,+\infty)$ splňující $c(t) \leq f(k(t))$ pro všechna $t \in (0,+\infty)$ a zároveň splňující vztah (2.8), která maximalizuje funkci (2.5).

V případě, že by funkce w byla závislá na k (endogenní), nemohli bychom použít pro řešení problému spotřebitelského výběru metod variačního počtu. Rovnice (1.4) však ukazuje nesplnění podmínky endogenity w.

Tuto endogenitu funkce w lze „obejít“ následující úvahou. Předpokládejme, že trajektorie $\tilde{c}$, $\tilde{w}$ a $\tilde{k}$ maximalizují V a splňují rozpočtové omezení. Předpokládejme také, že jedna domácnost se rozhodne vybrat trajektorii spotřeby $c \neq \tilde{c}$. Jelikož ekonomiku tvoří velké množství domácností, neovlivní volba jiné trajektorie spotřeby jednou domácností trajektorie $\tilde{k}$ a $\tilde{w}$.Veličiny $\tilde{k}$ a $\tilde{w}$ lze tedy chápat jako exogenní (nezávislé na volbě c). Zároveň vzhledem k tomu, že c není optimální trajektorie, musí si příslušná domácnost volbou c jen pohoršit (snížit svůj užitek). Kdyby tomu tak nebylo, následovaly by ji i ostatní domácnosti (domácnosti jsou identické). Za předpokladu, že optimální trajektorie spotřeby na jednotku efektivní práce je právě jedna, lze považovat trajektorie $\tilde{w}$ a $\tilde{k}$ za exogenní. Trajektorie $\tilde{c}$ je v takovém případě řešením následující úlohy

$$\tilde{c} = \max_c V(c)$$

za podmínek

$$O(c) = k(0),$$
$$f(k(t)) \leq c(t).$$

Tento ekonomický problém odpovídá následující matematické úloze (viz John, Kalenda, Zelený, 2006, str. 24).

Formulace isoperimetrické úlohy variačního počtu s nekonečným plánovacím horizontem.
Dáno:

- A, $B \in \mathbf{R}$,
- F, $G \in \mathcal{C}^2((0, +\infty) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.

Hledáme:

- $y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, +\infty))$

splňující $H(y) = \int\limits_0^{+\infty} G(t, y(t), y'(t))\,dt = B$, $y(0) = A$, že hodnota

$$V(y) = \int\limits_0^{+\infty} F(t, y(t), y'(t))\,dt$$

je maximální (resp. minimální).

Roli hledané trajektorie y hraje funkce c, a tedy

$$\begin{aligned} F(t, c(t), c'(t)) &= e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \\ G(t, c(t), c'(t)) &= e^{-R(t)+(n+g)t}(c(t) - w(t)), \\ A &= c(0) \ \ a \\ B &= k(0). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Další možností, jak se vyhnout „problému endogenity“ w, je předpokládat, že w není závislé na k. V tomto případě by w byla spotřebitelům předem známá, exogenní (model by ji nevysvětloval) a omezená ($0 < w(t) \leq \overline{w}$ pro všechna $t \in (0, +\infty)$) funkce. Takovýto postup však naráží na námitku, že efektivní práce by v tomto případě nemusela být placena za svůj mezní produkt. To je v rozporu s předpokladem dokonalé konkurence, kterou předpokládá RCK model.

Analyticky „nejčistším“ řešením by bylo ponechání endogenity w a použití teorie optimálního řízení. Omezující funkce O by v tomto případě měla tvar

$$O(c,k) = \int_0^{+\infty} e^{-R(t)+(n+g)t}(c(t) - f(k(t)) + k(t)f'(k(t))\,dt.$$

Řídící diferenciální rovnice by vypadala následovně

$$k' = f(k) - c - (n+g)k.$$

Funkcionál V by zůstal stejný. Řešili bychom tedy následující úlohu

$$\max_c V(c)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} O(c,k) &= k(0), \\ c(t) &\leq f(k(t)), \\ k' &= f(k) - c - (n+g)k. \end{aligned}$$

Řešení takovéhoto problému však přesahuje možnosti této práce. Autor tudíž provede maximalizaci pomocí variačního počtu, kde zdůvodnění exogenity w a k se bude opírat o předpoklad existence a jednoznačnosti optimální trajektorie c.

2.2.2 Řešení problému

Nutnou podmínku pro trajektorii c, která maximalizuje užitkovou funkci (2.5) a zároveň splňuje rozpočtové omezení (2.8), vyjadřuje následující věta (viz John, Kalenda, Zelený, 2006, str. 24).

Eulerova rovnice pro isoperimetrické úlohy s nekonečným plánovacím horizontem. *Nechť F a G ve formulaci isoperimetrické úlohy variačního počtu s nekonečným* *plánovacím horizontem mají tvar* $F(t,y,y') = \tilde{F}(y,y')e^{-\rho t}$, $G(t,y,y') = D(t)\tilde{G}(y)$, *kde* $\rho > 0$ *a* $\tilde{F} \in \mathcal{C}^2(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R})$, $D, \tilde{G} \in \mathcal{C}^2(\boldsymbol{R})$. *Nechť* y *je extrém v úloze (P8), přičemž* y, y' *jsou omezené. Potom platí:* y *splňuje buď*

(ER1) $$G_y(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad t \in \langle 0, +\infty),$$

nebo existuje $\lambda \in \boldsymbol{R}$, *že* y *pro každé* $t \in \langle 0, +\infty)$ *splňuje*

(ER2) $$F_y(t, y(t), y'(t)) - \lambda G_y(t, y(t), y'(t)) = \tfrac{d}{dt}(F_{y'}(t, y(t), y'(t))).$$

Spočtěme příslušné derivace.

$$\begin{aligned} G_c(t, c(t), c'(t)) &= e^{-R(t)+(n+g)t}, \\ F_c(t, c(t), c'(t)) &= e^{-\beta t} c(t)^{-\theta}, \\ F_{c'}(t, c(t), c'(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Aplikací Eulerovy rovnice dostaneme, že

$$e^{-R(t)+(n+g)t} = 0, \tag{2.11}$$

nebo existuje $\lambda \in \mathbf{R}$ takové, že pro optimální trajektorii c platí

$$e^{-\beta t} c(t)^{-\theta} - \lambda e^{-R(t)+(n+g)t} = 0. \tag{2.12}$$

Je zřejmé, že rovnice (2.11) nemá žádné řešení. Ač rovnice (ER2) je obecně diferenciální rovnice druhého řádu, v tomto konkrétním případě, kdy užitková funkce ani rozpočtové omezení nezávisejí na $c'(t)$, se o diferenciální rovnici nejedná. Vzhledem k absenci $c'(t)$ v rovnici (2.12) můžeme přímo vyjádřit funkční vztah pro trajektorii c

$$c(t) = \lambda^{-\frac{1}{\theta}} e^{-\frac{1}{\theta}(\beta+n+g)t + \frac{R(t)}{\theta}}.$$

Použitím vztahu $\beta = \rho - n - (1-\theta)g$ můžeme psát

$$c(t) = \lambda^{-\frac{1}{\theta}} e^{-\frac{1}{\theta}(\rho+\theta g)t + \frac{R(t)}{\theta}}. \tag{2.13}$$

Konstantu λ však neznáme, museli bychom ji proto dopočíst z rozpočtového omezení. Jednodušší však je, když dosazením $t = 0$ do rovnice (2.13) spočteme $c(0)$ a to následně vypočteme z rozpočtového omezení. Požadovaný vztah pro $c(0)$ je tedy následující

$$c(0) = \lambda^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Rovnici (2.13) proto můžeme přepsat na

$$c(t) = c(0)e^{-\frac{1}{\theta}(\rho+\theta g)t+\frac{R(t)}{\theta}}. \tag{2.14}$$

Dříve než spočteme $c(0)$, upravme si poněkud rozpočtové omezení (2.8)

$$\int_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}c(t)\,dt = k(0) + \int_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}w(t)\,dt.$$

Dosazením vztahu (2.14) do upraveného rozpočtového omezení obdržíme

$$c(0)\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}((1-\theta)R(t)+(\theta n-\rho)t)}\,dt = k(0) + \int_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}w(t)\,dt.$$

Potom vyjádříme $c(0)$ následovně

$$c(0) = \frac{k(0) + \int_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}w(t)\,dt}{\int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}((1-\theta)R(t)+(\theta n-\rho)t)}\,dt}. \tag{2.15}$$

Až doposud jsme předpokládali, že ač trajektorie w a k jsou závislé na c, reprezentativní domácnost je bere jako nezávislé na c (pro zdůvodnění viz část 2.2.1). Nyní budeme předpokládat (pouze pro účely následujícího důkazu), že w je exogenní (tj. nezávislá na k), omezená a domácnostem předem známá funkce. To znamená, že w se nemusí rovnat $MPAL$. Potom můžeme ukázat, že optimální trajektorie c je jediným globálním maximem fukcionálu V. Postačující podmínku pro globální extrém v úlohách variačního počtu vyjadřuje následující věta (viz John, Kalenda, Zelený, 2006, str.25).

Postačující podmínka pro maximum v isoperimetrické úloze varičního počtu s nekonečným plánovacím horizontem. *Nechť funkce F ve formulaci isoperimetrické úlohy variačního počtu s nekonečným plánovacím horizontem splňuje následující podmínku.*

- *Pro každé $t \in (0, +\infty)$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.*

Potom jsou (ER1) a (ER2) postačující podmínky pro maximum

Podmínka, podle níž je rovnice (2.12) také postačující podmínkou pro globální maximum, je splněna, je-li pro každou trajektorii c a pro každé $t \in (0, +\infty)$ matice

$$\nabla^2 F(t, c(t), c'(t)) = \begin{pmatrix} F_{cc}(t, c(t), c'(t)) & F_{cc'}(t, c(t), c'(t)) \\ F_{c'c}(t, c(t), c'(t)) & F_{c'c'}(t, c(t), c'(t)) \end{pmatrix}$$

negativně semidefinitní, kde $F(t, c(t), c'(t)) = Be^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$.

Spočítejme příslušné derivace

- $F_c(t, c(t), c'(t)) = Be^{-\beta t} c(t)^{-\theta}$,
- $F_{cc}(t, c(t), c'(t)) = -\theta B e^{-\beta t} c(t)^{-(\theta+1)} < 0$,
- $F_{c'}(t, c(t), c'(t)) = F_{cc'}(t, c(t), c'(t)) = F_{c'c}(t, c(t), c'(t)) = F_{c'c'}(t, c(t), c'(t)) = 0$.

Matice $\nabla^2 F(t, c(t), c'(t))$ má potom tvar

$$\nabla^2 F(t, c(t), c'(t)) = \begin{pmatrix} -\theta B e^{-\beta t} c(t)^{-(\theta+1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tato matice je evidentně negativně semidefinitní, a tedy trajektorie (2.14) je za podmínky, že w je nezávislá na k, jediným globálním maximem funkce (2.5).

2.3 Dynamické chování veličin RCK

V této části budeme zkoumat vývoj hlavních veličin RCK modelu (c a k) v čase. Bude nás zajímat, zda-li konvergují k nějakým stacionárním hodnotám. Vzhledem k tomu, že se jedná o poměrně komplikovaný problém, budeme postupovat ve dvou krocích. Nejdříve budeme pro účely snadnějšího pochopení problému uvažovat v rozporu s předpoklady modelu konstantní úrokovou míru r (i reálnou mzdu na jednotku efektivní práce w). Posléze získané výsledky zobecníme i na případ, kdy je úroková míra funkcí času.

2.3.1 Případ konstantní r a w

Abychom mohli uvažovat konstantní úrokovou míru, musíme nejdřív poněkud změnit předpoklady k produkční funkci. V této části budeme pracovat s produkční funkcí ve tvaru

$$F(K, AL) = r_0K + w_0AL,$$

kde r_0 a $w_0 \in \mathbf{R}^+$.

Vyjádřeme si některé její vlastnosti

1. $\partial_1 F = r_0 > 0$,
2. $\partial_2 F = w_0 > 0$,
3. $\partial_1^2 F = 0$,
4. $\partial_2^2 F = 0$,
5. $F(l \cdot K, l \cdot AL) = l \cdot r_0K + l \cdot w_0AL = l \cdot (r_0K + w_0AL) = l \cdot F(K, AL)$.

Jak lze snadno nahlédnout, produkční funkce, se kterou pracujeme v této části, neodpovídá svými vlastnostmi produkční funkci, kterou předpokládá RCK a Solowův model, nejsou totiž splněny předpoklady klesajícího MPK a $MPAL$. Je nutné mít na paměti, že toto zjednodušení má za cíl usnadnit pochopení obecného dynamického chování nikoliv deformovat dosavadní výklad RCK modelu jinými předpoklady k produkční funkci. Tyto předpoklady totiž brzy opustíme.

Modifikovaná produkční funkce f má v tomto případě tvar

$$f(k) = F(\frac{K}{AL}, 1) = r_0k + w_0$$

Odvoďme opět některé její vlastnosti

1. $f'(k) = r_0 > 0$,
2. $f''(k) = 0$.

Abychom mohli analyzovat dynamické chování veličiny k, připomeňme si vztah (1.5) ze strany 9. Jeho úpravou dostaneme

$$k'(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t). \tag{2.16}$$

Vyjádřeme si nyní stacionární řešení výše zmíněné diferenciální rovnice, tj. taková c a k, pro která se $k'(t) = 0$. Položením $k'(t) = 0$ a vynecháním nezávislé proměnné t obdržíme

$$\begin{aligned} c &= f(k) - (n+g)k \\ &= r_0 k + w_0 - (n+g)k \\ &= (r_0 - n - g)k + w_0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Obdobně postupujme v případě c. Z rovnice (2.14) spočítejme derivaci optimální trajektorie c

$$\begin{aligned} c'(t) &= c(0)e^{-\frac{1}{\theta}(R(t)-(\rho-\theta g)t)} \left(\frac{1}{\theta}\left(r(t) - \rho - \theta g\right)\right) \\ &= c(t)\left(\frac{1}{\theta}\left(r(t) - \rho - \theta g\right)\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

V případě konstantní r má rovnice (2.18) tvar

$$c'(t) = c(t)\left(\frac{1}{\theta}\left(r_0 - \rho - \theta g\right)\right).$$

Chceme-li opět zjistit, pro jaká c a k nemá spotřeba na jednotku efektivní práce tendenci ke změně, položíme $c'(t) = 0$, čímž obdržíme

$$f'(k) = r_0 = \rho + \theta g. \tag{2.19}$$

Odvození výše uvedené rovnice využívá, že $c(t) > 0$ a $f'(k) = r_0$.

Jelikož r_0, ρ, θ i g jsou pevně dané konstanty, rovnice (2.19), která představuje podmínku stacionarity c, buď je splněna a nebo není. Prozkoumejme proto, co by její nesplnění či splnění znamenalo.

Je zřejmé, že v případě nesplnění rovnice (2.19) by systém nebyl nikdy v rovnováze. Spotřeba by tedy buď rostla nade všechny meze a nebo by klesla až na nulu (viz rovnice (2.14)). Prvně zmíněný případ je neslučitelný s rozpočtovým omezením a později zmíněný by si nikdy nezvolil spotřebitel maximalizující současnou hodnotu celoživotní spotřeby.

V případě, že je podmínka stacionarity c splněna, je $c'(t) = 0$ pro všechny přípustné hodnoty $c(0)$ a $k(0)$ (z hlediska rozpočtového omezení). Upravme si proto rovnici (2.15), která dává do souvislosti přípustné hodnoty $c(0)$ a $k(0)$, pro případ konstantní r a w

$$c(0) = \frac{k(0) + w_0 \int\limits_0^{+\infty} e^{(-r_0+n+g)t}\, dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}(((1-\theta)r_0+(\theta n-\rho)t)}\, dt}.$$

Použitím rovnice (2.19) obdržíme

$$\begin{aligned} c(0) &= \frac{k(0) + w_0 \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\, dt} \\ &= \frac{k(0) + \frac{w_0}{\beta}}{\frac{1}{\beta}} \\ &= w_0 + \beta k(0). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Rovnice (2.17) a (2.20) určují taková $c(0)$ a $k(0)$, pro která je systém v rovnováze. Vzhledem k tomu, že rovnice (2.17) je splněna pro všechna $t > 0$, můžeme ji přepsat takto

$$c(0) = (r_0 - n - g)k(0) + w_0.$$

Použitím vztahu (2.19) přepíšeme výše uvedenou rovnici na

$$c(0) = w_0 + \beta k(0).$$

Tato rovnice je shodná s rovnicí (2.20). To znamená, že množina bodů

$$\left\{(k(0), c(0))\,, k(0) \in (0, \overline{k}), c(0) > 0, k'(t) = 0, c'(t) = 0\right\}$$

je shodná s množinou

$$\left\{ (k(0), c(0))\,, k(0) \in (0, \overline{k}), c(0) = \frac{k(0) + w_0 \int\limits_0^{+\infty} e^{(-r_0+n+g)t}\, dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}(((1-\theta)r_0+(\theta n-\rho)t)}\, dt} \right\}.$$

Čili všechny přípustné body $(k(0), c(0))$ z hlediska rozpočtového omezení jsou zároveň stacionárními body a naopak všechny stacionární body jsou zároveň přípustnými body.

Nyní zbývá zodpovědět jen čistě technickou otázku, jaké je znaménko $k'(t)$ pro body pod resp. nad přímkou určenou rovnicemi (2.17) a (2.20). Pro všechny body $k(0) \in (0, \overline{k})$ a $c(0) > 0$ je samozřejmě $c'(t) = 0$.

Z rovnice (2.16) vyplývá, že pro body splňující $c < (r_0 - n - g)k + w_0$ je $k'(t) > 0$ a naopak pro $c > (r_0 - n - g)k + w_0$ je $k'(t) > 0$. Avšak v bodech mimo přímku $c = (r_0 - n - g)k + w_0$ nejsou splněny předpoklady RCK modelu. Pro $c(0) < (r_0 - n - g)k(0) + w_0$ je

$$c(0) < \frac{k(0) + w_0 \int\limits_0^{+\infty} e^{(-r_0+n+g)t}\, dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}(((1-\theta)r_0+(\theta n-\rho)t)}\, dt}.$$

Čili současná hodnota budoucí spotřeby je nižší než současná hodnota budoucích příjmů. Takovouto možnost by si nikdy nevybral spotřebitel maximalizující současnou hodnotu budoucí spotřeby. Naopak pro $c(0) > (r_0 - n - g)k(0) + w$ je

$$c(0) > \frac{k(0) + w \int\limits_0^{+\infty} e^{(-r_0+n+g)t}\, dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}(((1-\theta)r_0+(\theta n-\rho)t)}\, dt}.$$

V tomto případě je současná hodnota budoucí spotřeby vyšší než současná hodnota budoucích příjmů, a tedy není splněno rozpočtové omezení. Potom však je nemožné korektně určit znaménka $k'(t)$, protože nesplněním předpokladů RCK modelu nemůžeme určit chování c v čase. Určení znamének $k'(t)$ je proto čistě technická záležitost, která např. umožní určit stabilitu stacionárních řešení.

2.3.2 Oslabení předpokladu konstantní r a w

Posíleni znalostmi dynamického chování veličin RCK při konstantní r a w, můžeme v této části zkoumat zobecnění tohoto problému. Zejména analyzovat konvergenci obecného řešení soustavy diferenciálních rovnic, která je určená rovnicemi (2.18) a (2.16), s počáteční podmínkou danou rovnicí (2.15), kde $k(0) \in (0, \overline{k})$, ke stacionárnímu řešení uvedené soustavy, které je určené rovnicemi (1.7) a (2.19). Také se budeme zabývat stabilitou těchto stacionárních řešení.

Nejprve určíme stacionární řešení soustavy diferenciálních rovnic, která je určená rovnicemi (2.18) a (2.16). Stacionární řešení rovnice (2.16) jsme spočítali v části 1.2 a je určeno následující rovnicí

$$c = f(k) - (n+g)k.$$

Předpokládáme-li, že $c > 0$, stacionární řešení rovnice (2.18) dostaneme položením

$$r(t) - \rho - \theta g = 0.$$

Použijeme-li vztah $r = f'(k)$ a označíme-li stacionární hodnotu kapitálu k^*, dostaneme

$$f'(k^*) = \rho + \theta g. \tag{2.21}$$

Úroveň kapitálu k^* nazýváme *úrovní kapitálu podle modifikovaného zlatého pravidla.* Jelikož $f'(k)$ je klesající a uvažujeme jen možnost $\beta > 0$, platí $k^* < k^{**}$. Takže úroveň kapitálu k^*, při které je současná hodnota celoživotního užitku maximální, je nižší než úroveň kapitálu k^{**}, která maximalizuje spotřebu v každém čase t. Toto je hlavní výsledek RCK modelu.

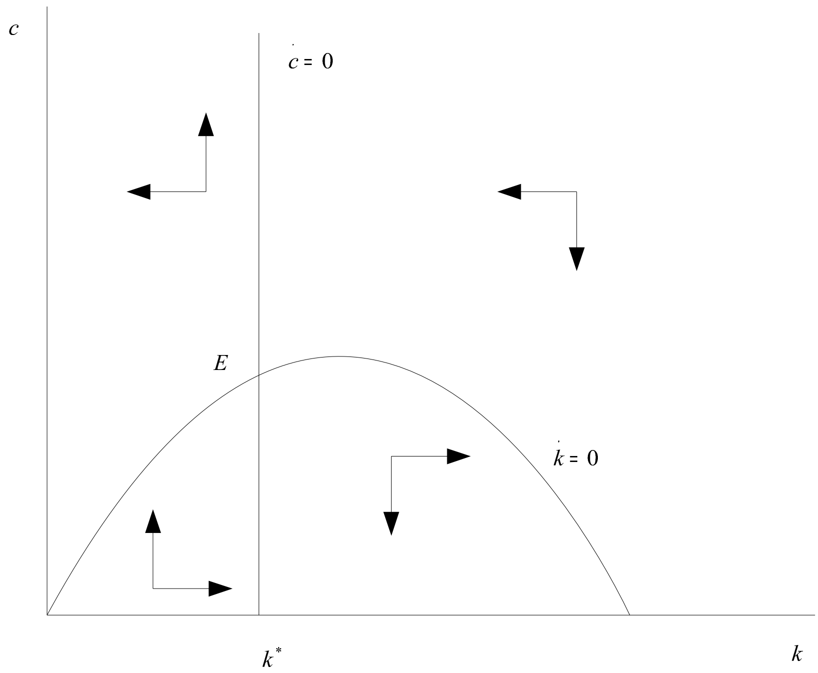
Bodu k^* odpovídá bod c^*, který je dán následující rovnicí

$$c^* = f(k^*) - (n+g)k^*. \tag{2.22}$$

Rovnice (2.18) vzhledem k tomu, že $f'(k)$ je klesající, ukazuje, že pro $k < k^*$ je $c'(t) > 0$ a pro $k > k^*$ je $c'(t) < 0$. V části 1.2 jsme ukázali, že pro body nad křivkou určenou rovnicí (1.7) je $k'(t) < 0$ a pro body pod touto křivkou je $k'(t) > 0$. Nyní tedy můžeme znázornit dynamiku ekonomiky RCK modelu (viz obr. 2.1).

Bod E, což je jen jiné označení pro bod (c^*, k^*), představuje rovnovážný bod ekonomiky RCK modelu ($c'(t)$ a $k'(t) = 0$). Pomocí Ljapunovovy věty (viz John, Kalenda, Zelený, 2003, str. 189) zjistíme jeho asymptotickou stabilitu. Definujme vektorovou funkci $h\colon (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbf{R^2}$ takto

$$h(c,k) = \begin{pmatrix} c\frac{1}{\theta}(f'(k) - \rho - \theta g) \\ f(k) - c - (n+g)k \end{pmatrix}.$$



Obrázek 2.1: Dynamika ekonomiky RCK modelu

Nyní spočtěme její parciální derivace v bodě E

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial c}(c^*, k^*) &= \frac{1}{\theta}(f'(k^*) - \rho - \theta g) = 0,\\
\frac{\partial h_1}{\partial k}(c^*, k^*) &= \frac{1}{\theta} c f''(k^*) < 0,\\
\frac{\partial h_2}{\partial c}(c^*, k^*) &= -1,\\
\frac{\partial h_2}{\partial k}(c^*, k^*) &= f'(k^*) - (n+g) > 0.
\end{aligned}$$

Definujme matici D takto

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial c}(c^*, k^*) & \frac{\partial h_1}{\partial k}(c^*, k^*) \\ \frac{\partial h_2}{\partial c}(c^*, k^*) & \frac{\partial h_2}{\partial k}(c^*, k^*) \end{pmatrix}.$$

Dosazením příslušných parciálních derivací dostaneme

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\theta} c f''(k^*) \\ -1 & f'(k^*) - (n+g) \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou kořeny následujícího polynomu

$$\det(\lambda I - D) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{\theta} c f''(k^*) \\ 1 & \lambda - f'(k^*) + (n+g) \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(f'(k^*) - (n+g)) + \frac{1}{\theta} c f''(k^*).$$

Nyní spočteme kořeny této kvadratické rovnice

$$\lambda_{1,2} = \frac{f'(k^*) - (n+g) \pm \sqrt{(f'(k^*) - (n+g))^2 - \frac{4}{\theta} c f''(k^*)}}{2}.$$

Jelikož

$$f'(k^*) - (n+g) + \sqrt{(f'(k^*) - (n+g))^2 - \frac{4}{\theta} c f''(k^*)} > 0,$$

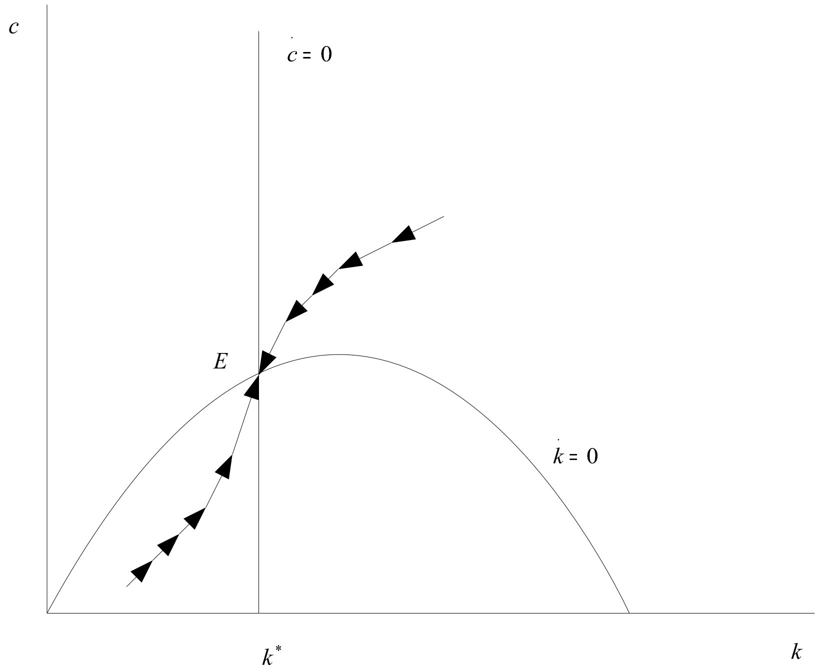
tak reálná část jednoho vlastního čísla matice D je kladná. Podle Ljapunovovy věty je tedy E nestabilní rovnovážný bod. To přináší určité komplikace, kterými se budeme zabývat poté, co zjistíme, jestli obecné řešení soustavy rovnic (2.18), (2.16) s počáteční podmínkou danou rovnicí (2.15) konverguje ke stacionárnímu řešení, které je reprezentované bodem E.

Důkaz takové konvergence však přesahuje možnosti této práce (pro speciální případ konstantní r jsme již tuto konvergenci dokázali). Proto vyjdeme z následující věty, která je použitelná i pro náš problém. Roli kapitálu na jednotku efektivní práce v ní hraje poměr kapitálu a práce, místo počáteční hodnoty $c(0)$ se v této větě pracuje s počáteční hodnotou $q(0)$.[3] Zkoumání vztahu mezi q a k je alternativou ke zkoumání vztahu c a k, kterým se zabýváme v této práci, přičemž vztah, kterým libovolné hodnotě $k(0) \in (0, \overline{k})$ přiřadíme právě jednu hodnotu $c(0)$, vyjadřuje rovnice (2.15). Veličina z označuje množství investic. V našem problému jsou investice reziduální veličinou a jejich množství je dáno rozdílem $f(k)$ a c.

„*For any initial capital-labor ratio* $k(0)$ *an initial imputed price of investment goods* $q(0)$ *can be chosen in such a way that the path starting from these values and satisfying the optimality conditions asymptotically approaches the quasi-stationary path* (c^*, k^*, z^*)*. This path is the unique optimum path. Moreover, on this unique optimum path either the capital-labor ratio* k *and consumption per capita* c *are both strictly increasing, if* $k(0) < k^*$*, or they are both strictly decreasing, if* $k(0) < k^*$*.*“ (Cass, 1965, str. 238)

[3] Cass používá k maximalizaci Pontrjaginův princip maxima a funkce $t \mapsto q(t)$, která vyjadřuje vývoj ceny investičních statků v čase, je součástí Hamiltoniánu, pomocí kterého se provádí vlastní maximalizace.

Již jsme ukázali, že pro $k(0)$ existuje právě jedno $c(0)$ a že pro $k(0) < k^*$ jsou k i c rostoucí a pro $k(0) > k^*$ klesající, avšak pro důkaz konvergence obecného řešení ke stacionární trajektorii (c^*, k^*) je vhodné použít výše uvedenou větu. Konvergenční trajektorii znázorníme do následujícího obrázku.



Obrázek 2.2: Konvergenční trajektorie

K rovnovážnému bodu tedy konvergují jen trajektorie s počáteční podmínkou určenou rovnicí (2.15), pro zobecněné dynamické chování veličin RCK je tedy tato rovnice zároveň konvergenční trajektorií. Pro trajektorie s jinou počáteční podmínkou buď c roste nade všechny meze a nebo klesá k nule. Tato skutečnost spolu s nestabilitou rovnovážného bodu E by mohla vést k odmítnutí tohoto modelu. Musíme si však uvědomit, že počáteční podmínky, které nesplňují rovnici (2.15), nesplňují rozpočtové omezení (viz část 2.3.1). Takže striktně vzato by se ekonomika měla pohybovat jen po konvergenční trajektorii směrem k rovnovážnému bodu. To však naráží na námitku, že v realitě mohou spotřebitelé alespoň do určité míry své rozpočtové omezení porušovat (např. pomocí Ponziho financování nebo naopak z nedostatečné racionality je jejich současná hodnota budoucí spotřeby nižší než současná hodnota budoucích příjmů). Stojí proto za zamyšlení, zda-li by nebylo vhodné poněkud oslabit předpoklady RCK modelu. Tento model byl však vyvinut jako první z řady modelů s nekonečným plánovacím horizontem a na jeho „zdokonalení“ aspirují až následné modely.

Závěr

Shrnutí dosažených výsledků

Aplikací variačního počtu na optimalizační úlohu definovanou v části 2.2.1 jsme dostali, že optimální trajektorie spotřeby na jednotku efektivní práce je daná následující rovnicí

$$c(t) = c(0)e^{-\frac{1}{\theta}(\rho+\theta g)t+\frac{R(t)}{\theta}}.$$

Analýzou dynamického chování veličin RCK modelu jsme dospěli k závěru, že RCK model obsahuje pět endogenní proměnných c, k, w, r a $c(0)$ (první čtyři proměnné jsou trajektorie, pátá je reálné číslo) a pět exogenních proměnných n, g, θ, ρ a $k(0)$. Jejich vzájemný vztah popisuje následujících pět rovnic

$$\begin{aligned}
c'(t) &= c(t)\left(\frac{1}{\theta}\left(r(t)-\rho-\theta g\right)\right),\\
k'(t) &= f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t),\\
c(0) &= \frac{k(0) + \int\limits_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}w(t)\,dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}((1-\theta)R(t)+(\theta n-\rho)t)}\,dt},\\
w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t)),\\
r(t) &= f'(k(t)),
\end{aligned}$$

kde funkce R je definovaná takto

$$R(t) = \int\limits_0^t r(s)\,ds.$$

Vývoj takového systému v čase znázorňují obrázky 2.2 a 2.1.

Přínos RCK modelu pro pochopení problematiky hospodářského růstu

Ukázali jsme, že optimální úroveň kapitálu z hlediska RCK modelu je k^* a že systém k takové hodnotě konverguje. Také jsme ukázali, že úroveň kapitálu k^*, která maximalizuje současnou hodnotu užitku z celoživotní spotřeby, je za podmínky, že $\beta > 0$, menší než úroveň kapitálu k^{**}, která maximalizuje spotřebu na jednotku efektivní práce v každém čase t. Vlastně jsme pomocí RCK modelu verifikovali hypotézu, kterou jsme vyřkli již při výkladu Solowova modelu, totiž že společnost si ze všech možných rovnovážných hodnot kapitálu vybere úroveň kapitálu nižší než nebo rovnou k^{**} (viz část 1.2). Zdůvodnění tohoto faktu, které nám poskytl RCK model, je pochopitelně mnohem sofistikovanější než to, které jsme použili v rámci Solowova modelu. Hypotézu, že $k^* < k^{**}$, zdá se, potvrzují empirická data z USA druhé poloviny 20. století (viz Cahlík, 1998 , kap. 17).

Navic vztah $f'(k^*) = \rho + \theta g$ je použitelný i pro potřeby hospodářské politiky. Ač v RCK modelu je k endogenní proměnná, tvůrci hospodářských politik MPK obvykle znají, a tedy ji většinou nepotřebují spočítat za pomocí jiných proměnných. Naopak neznají diskontní míru ρ a při četných příležitostech by pro ně bylo vhodné ji umět přinejmenším odhadnout (např. při současných debatách okolo možnosti vyhnout se možným důsledkům klimatických změn). Jelikož růst produktivity práce g je obvykle kladný a $\theta > 0$, tak diskontní míra je podle RCK modelu menší než MPK.

Na druhou stranu RCK model neuvažuje nejistotu (domácnosti plánují budoucí spotřebu za plné znalosti budoucího vývoje jiných veličin), veličiny n a g jsou považovány za konstantní atd. Je tedy možné, že pokud bychom sestrojili jiný model, který by se snažil abstrahovat od podobných zjednodušení, naše závěry ohledně vztahu diskontní míry a MPK by byly odlišné.

Summary

Summary of achieved results

Applying the calculus of variations to problem defined in section 2.2.1 we have obtained that the optimal path of consumption per unit of effective labour must follow this equation

$$c(t) = c(0)e^{-\frac{1}{\theta}(\rho+\theta g)t+\frac{R(t)}{\theta}}.$$

Analyzing the dynamics behaviour of variables of the RCK model we have concluded that the RCK model contains five endogenous variables c, k, w, r and $c(0)$ (c, k, w, r are paths and c(0) is real number) and five exogenous variables n, g, θ, ρ and $k(0)$. Their mutual relation is described by following equations

$$\begin{aligned}
c'(t) &= c(t)\left(\frac{1}{\theta}\left(r(t)-\rho-\theta g\right)\right),\\
k'(t) &= f(k(t)) - c(t) - (n+g)k(t),\\
c(0) &= \frac{k(0) + \int\limits_0^{+\infty} e^{(n+g)t-R(t)}w(t)\,dt}{\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{1}{\theta}((1-\theta)R(t)+(\theta n-\rho)t)}\,dt},\\
w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t)),\\
r(t) &= f'(k(t)),
\end{aligned}$$

where the function R is defined as follows

$$R(t) = \int\limits_0^t r(s)\,ds.$$

The evolution of such a system describes figures 2.2 a 2.1.

Contribution of the RCK model for comprehension of the problem of economic growth

We have shown that optimal capital level in terms of the RCK model is k^* and that the system converges to such a level. We have also shown that the capital level k^* which maximizes present value of life-time utility is under the condition that $\beta > 0$ less than the capital level k^{**} which maximizes consumption per unit of effective labour in each time t. Thus we have verified the hypothesis which was introduced during the explanation of Sollow model that society chooses such a capital level that is equal or less than k^{**} (see section 1.2). This hypothesis seems to be supported by empirical data from USA in second half of 20^{th} century (see Cahlík, 1998, chap. 17).

Moreover, the relation $f'(k^*) = \rho + \theta g$ can be useful for needs of economic policy. Although k is endogenous variable in the RCK model, economic policy makers usually know MPK, therefore they need not count it by means of other variables. On the other hand, they do not know the discount rate ρ and they would, maybe, almost want to estimate it (e.g. for needs of contemporary discussions about possible avoidance of impacts of climate changes). Because productivity growth g is mainly positive and because $\theta > 0$, discount rate is according to RCK model less than MPK.

On the other hand, RCK model do not assume uncertainty (households plan future consumption with full knowledge of future evolution of other variables), variables n and g are assumed to be constant etc. If we constructed other, more realistic model, our conclusions as to discount rate could be different.

Seznam grafů

Literatura

1. CAHLÍK, T. *Makroekonomie*. Praha: Karolinum. 1998.
2. CASS, D. *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation.* The Review of Economic Studies. Vol. 32. No. 3 (July 1965). pp. 233-240.
3. CASS, D. *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem.* Econometrica. Vol. 34. No. 4 (October 1966). pp. 833-850.
4. HÁJKOVÁ, V., JOHN O., ZELENÝ, M. *Matematika.* Praha: Karolinum. 2003.
5. HOLMAN, R. a kol. *Dějiny ekonomického myšlení.* Praha: C. H. Beck. 1999.
6. JOHN, O., KALENDA, O., ZELENÝ, M. *Matematika (pokračování).* Praha: Matfyzpress. 2003.
7. JOHN, O., KALENDA, O., ZELENÝ, M. *Matematika V - dynamická optimalizace.* www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny. Praha. 2006.
8. KOOPMANS, T., C. *On the Concept of Optimal Economic Growth.* New Haven: Academiae Scientiarum Scripta Varia 28. 1965.
9. PHELPS, E., S. *Golden Rules of Economic Growth: Studies of Efficient and Optimal Investment.* New York: Norton. 1966.
10. RAMSEY, F., P. *A Mathematical Theory of Savings*, In: STIGLITZ, J., E., UZAWA, H. *Readings in the Modern Theory of Economic Growth.* Cambridge: MIT Press. 1969.
11. ROMER, D. *Advanced Macroeconomics.* New York: McGraw-Hill. 2006.

Teze (kopie)

UNIVERSITAS CAROLINA PRAGENSIS
založena 1348

Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií

Opletalova 26
110 00 Praha 1
TEL: 222 112 330,305
TEL/FAX: 222 112 304
E-mail: ies@mbox.fsv.cuni.cz
http://ies.fsv.cuni.cz

Akademický rok 2007/2008

TEZE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	Václav Franče
Obor:	Ekonomie
Konzultant:	Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Garant studijního programu Vám dle zákona č. 111/1998 Sb. o vysokých školách a Studijního a zkušebního řádu UK v Praze určuje následující bakalářskou práci

Předpokládaný název BP:

Ramsey-Cass-Koopmansův model a metody variačního počtu

Charakteristika tématu, současný stav poznání, případné zvláštní metody zpracování tématu:

Cílem práce je seznámit se s matematicky exaktním popisem Ramsey-Cass-Koopmansova modelu (RCK). Hlavní důraz bude kladen na studium matematického chování modelu, ale nedílnou součástí práce bude i ekonomická interpretace předpokladů, dosažených výsledků apod. Dále bude model studován v různých specifičtějších situacích.
V práci se bude vycházet z knihy D. Romer: *Advanced Macroeconomics,* McGraw-Hill, New York, 2006, která reprezentuje současný stav poznání.

Struktura BP:

1. Úvod – hospodářský růst 2. Předpoklady a formulace RCK modelu 3. Použité matematické metody 4. Vlastní analýza RCK modelu 5. Dynamické chování veličin RCK modelu a jeho další aspekty 6. Řešené příklady

Seznam základních pramenů a odborné literatury:

D. Romer: *Advanced Macroeconomics,* McGraw-Hill, New York, 2006. M. Brown: *Differential Equations and Their Applications*, Springer Verlag, New York, 1975. A.C. Chiang: *Elements of Dynamic Optimalization,* McGraw-Hill, New York, 1992. V. Hájková, O. John, O. Kalenda, M. Zelený: *Matematika*, Karolinum, Praha, 2006.

Datum zadání:	červen 2007
Termín odevzdání:	červen 2008

Podpisy konzultanta a studenta:

.

V Praze dne 14.5.2007.